LÖSNINGSFÖRSLAG PÅ TENTAMEN I MSG110 SANNOLIKHETSTEORI
GÖTEBORGS UNIVERSITET 2017-10-24. OLLE NERMAN

1. a. OM B INTRÄFFAR SÅ INTRÄFFAR OCKSÅ $\bar{C}$. OM $\bar{B}$ INTE INTRÄFFAR SÅ INTRÄFFAR INTE HELLER A. DETTA GÖR ATT $\bar{B} \Leftrightarrow$ "MINST TVÅ AV A, B OCH C INTR." $P(\bar{B}) = 0{,}4$ ÄR ALLTSÅ SVARET.

b. OM A INTRÄFFAR SÅ INTRÄFFAR OCKSÅ $\bar{B}$ OCH C D.V.S. ALLA TRE HÄNDELSERNA. DÄRFÖR ÄR SÖKTA SANNOLIKHETEN $P(\bar{B} \setminus A) = P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) =$
$= P(\bar{B}) - P(A) = 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}3$

2 a. $E[Z] = E[3 + 2X - Y] = 3 + 2E[X] - E(Y) = 3 + 2\cdot 7 - 2 = 15$

$VAR[Z] = VAR[2X] + VAR[Y] - 2\,KOV[2X, Y] =$
$= 2^2 \cdot VAR[X] + VAR[Y] - 4\,KOV[X, Y] =$
$\underset{\substack{\uparrow \\ X, Y \text{ OBER.}}}{=} 4\cdot 9 + 4 - 4 \cdot 0 = 40$

b. $KOV[U, V] = KOV[X+Y, X-Y] = KOV[X, X] - KOV[X, Y] + KOV[X, Y] - KOV[Y, Y] = VAR[X] - VAR[Y] = 9 - 4 = 5$

$VAR[U] = VAR[V] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{OBER.}}}{=} VAR[X] + VAR[Y] = 9 + 4 = 13$

$\rho_{U,V} = \frac{KOV[X,Y]}{\sqrt{VAR[X]\,VAR[Y]}} = \frac{5}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}} = \frac{5}{13}$

3. a. $\begin{cases} P(X \le 3) = \Phi\left(\frac{3-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}9 \\ P(X \le -2) = \Phi\left(\frac{-2-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}5 \end{cases}$ OCH GER ENLIGT

TABELL $\begin{cases} \frac{3-\mu}{\sigma} \approx 1{,}28 \\ \frac{-2-\mu}{\sigma} = 0 \end{cases}$ SÅ $\mu = -2$, $\sigma = \frac{5}{1{,}28} \approx$

b. $P(|X| > 4) = P(X < -4) + P(X > 4) =$
$\approx \Phi\left(\frac{(-4+2)1{,}28}{5}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{(4+2)\cdot 1{,}28}{5}\right) \approx$
$\approx 1 - \Phi\left(\frac{2\cdot 1{,}28}{5}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{6\cdot 1{,}28}{5}\right) \approx$
$\approx 2 - \Phi(0{,}512) - \Phi(1{,}57) \approx 2 - 0{,}695 - 0{,}937 \approx 0{,}368$

FORTS. LÖSNINGSFÖRSLAG MSG-110 . 2017-10-24. OLLE NERMAN

4. $$P(|X|\le 0{,}02) = P\left(\frac{1}{|X|} \ge \frac{1}{0{,}02}\right) = P\left(\frac{1}{|X|^2} \ge \frac{1}{0{,}02^2} = 2500\right)$$

$$\le \frac{E\left[\frac{1}{|X|^2}\right]}{2500} = \frac{100}{2500} = 0{,}04$$ (MARKOVS OLIKHET)

5. a. $$L(c) = f_{X,Y}(x,y) \underset{\text{OBER.}}{=} f_X(x)\cdot f_Y(y) = \frac{(15c)^x e^{-15c}}{x!}\cdot\frac{(30c)^y e^{-30c}}{y!}$$

$$\frac{d \ln L(c)}{dc} = 0 \iff \frac{x\cdot 15}{15c} - 15 + \frac{y\,30}{30c} - 30 = 0$$

$\hat{c} = \frac{x+y}{45} \Rightarrow$ TEORETISK P.S. $\hat{C} = \frac{X+Y}{45}$

$E\left[\frac{X+Y}{45}\right] = \frac{E[X]+E[Y]}{45} = \frac{15c+30c}{45} = c$ SVARET ÄR ATT PUNKTSKATTNINGEN ÄR VÄNTEVÄRDESRIKTIG!

b. OBSERVERAD PUNKTSKATTNING $\hat{c} = \frac{23+52}{45} = \frac{75}{45} = \frac{5}{3}$

EFTERSOM $X+Y$ ÄR POISSONFÖRDELAD $(45\cdot c)$ SÅ ÄR $\sqrt{VAR[\hat{C}]}$ = TEORETISKA STANDARDFELET =

$\sqrt{\frac{45c}{45^2}} = \sqrt{\frac{c}{45}}$. NATURLIG SKATTNING AV STANDARDFELET ÄR $\sqrt{\frac{5}{3\cdot 45}} = \sqrt{\frac{1}{27}}$.

c. NORMALAPPROXIMATIONSINTERVALL

$c = \hat{C} \pm 1{,}96\sqrt{\frac{\hat{C}}{45}}$ $(\approx 95\%)$

OBSERVERAT

$c = \frac{5}{3} \pm 1{,}96\sqrt{\frac{1}{27}}$ $(\approx 95\%)$

$c = 1{,}67 \pm 0{,}38$ $(\approx 95\%)$

6. TESTVARIABEL

$$T = \frac{\left(\frac{Y}{800} - \frac{X}{400}\right)}{\sqrt{\frac{X+Y}{1200}\left(1-\frac{X+Y}{1200}\right)\left(\frac{1}{800}+\frac{1}{400}\right)}} \underset{\text{UNDER } H_0}{\approx} N(0,1)$$

FÖRKASTA OM $|T| > 1{,}96$. OBSERVERAT $t = \frac{0{,}187 - 0{,}0295}{\sqrt{0{,}025(1-0{,}025)\ 0{,}00375}}$

$= -0{,}108$

$= -4{,}21$

FÖRKASTA (TY $p_X > p_Y$)

7 $\hat{\beta} = \dfrac{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2} = \dfrac{13}{9\cdot 4{,}5} = \dfrac{13}{40{,}5} \approx 0{,}321$

$$\sum_{i=1}^{10}\left(y_i - (\bar{y} + \hat{\beta}(x_i-\bar{x}))\right)^2 = \sum_{i=1}^{4}(y_i-\bar{y})^2 - \hat{\beta}^2\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2$$

$$= 9\cdot 3 - \frac{13^2}{40{,}5} \approx 22{,}83$$

$$s^2 = \frac{1}{(10-2)}\,22{,}83 \approx 2{,}85$$

$F_{t(8)}(2{,}90) = 0{,}01$ SÅ TEORETISKT KONF. INTERVALL

$$\beta \leq \hat{\beta} + 2{,}90\frac{S}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2}} \qquad (99\%)$$

OBSERVERAT KONFIDENSINTERVALL

$$\beta \leq 0{,}321 + \frac{2{,}90\cdot\sqrt{2{,}85}}{\sqrt{40{,}5}} \approx 1{,}09 \qquad (99\%)$$

8. a. LÅT VINKELN VARA MOTSOLS FRÅN POSITIVA X-AXELN. MED CHANSEN $\frac{1}{2}$ HAMNAR VINKELN MELLAN $(0,\pi)$ OCH MAN INSER ATT SYMMETRI GÖR ATT DEN BETINGADE FÖRDELNINGEN FÖR X ÄR SAMMA SOM DEN OBETINGADE FÖRDELNINGEN (D.V.S. BETINGADE FÖRDELNINGEN ÄR LIKADAN NÄR VINKELN $(\pi, 2\pi)$. BETINGADE Θ-TÄTHETEN BLIR OCKSÅ LIKFORMIGT FÖRDELAD MEN NU PÅ INTERVALLET $(0,\pi)$. FÖR VINKLAR I DETTA INTERVALL GÄLLER ATT

$\cot\Theta = \frac{X}{5}$ OCH EFTERSOM cotan AVTAR MED Θ SÅ ÄR FÖRDELNINGSFUNKTIONEN FÖR X GIVEN AV $F(x) = P(X \leq x) =$ ~~P(Θ≥~~

$$P\left(\frac{X}{5} \leq \frac{x}{5}\right) = \frac{\pi - \operatorname{ARCCOT}\left(\frac{x}{5}\right)}{\pi}$$

DERIVERAR VI FÖRDELNINGSFUNKTIONEN SÅ FÅR VI SANNOLIKHETSTÄTHETEN FÖR X:

$$f(x) = \frac{1}{5\pi}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{5}\right)^2} = \frac{5}{\pi(25+x^2)}$$

b. FÖR ATT $E[X]$ SKALL EXISTERA KRÄVS ATT $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)\,dx < \infty$. MEN $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)\,dx = 2\cdot\int_0^{\infty} x\cdot\frac{5}{\pi(25+x^2)}$ $= \infty$ EFTERSOM INTEGRANDEN AVTAR SOM EN KONSTANT/X NÄR $X \to \infty$. ∴ VÄNTEVÄRDET EXISTERAR INTE!