Lösningar MSG110 2018-08-20

1. a) $P(A \cup B \cup C) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{disjunkta}}}{=} P(A) + P(B) + P(C) = 3 \cdot 0{,}2 = \boxed{0.6}$

b) $P(\text{exakt en händelse}) = P(A \cap B^c \cap C^c) + P(A^c \cap B \cap C^c)$
$+ P(A^c \cap B^c \cap C) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{oberoende}}}{=} 3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = \boxed{0{,}384}$

---

2. a) $P(\text{lag B vinner med } 4\text{-}2) = P(\{X = 2\} \cap \{Y = 4\})$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ober.}}}{=} P(X=2)P(Y=4) = \dfrac{2^2 e^{-2}}{2!} \cdot \dfrac{3^4 e^{-3}}{4!} = \boxed{\dfrac{27}{4} e^{-5} \approx 0{,}0455}$

b) $P(X + Y \geq 5) = 1 - P(X + Y \leq 4) = \{X + Y \text{ är } Po(\lambda = 5)\}$

$= \boxed{1 - \sum_{k=0}^{4} \dfrac{5^k e^{-5}}{k!} \approx 0{,}5595}$

---

3. a) Låt ξ_i = livslängden för smartphone nr i $(i = 1, \dots, 100)$
Då är $E(\xi_i) = 2$ och $\sigma = 2$. Enligt Centrala gränsvärdessatsen gäller att $T = \sum_{i=1}^{100} \xi_i$ är approx. $N(100 \cdot 2, 100 \cdot 4)$
$= N(200, 400)$. Nu fås att

$$P(T \leq 210) = P\Big(\underbrace{\frac{T - 200}{\sqrt{400}}}_{\approx N(0,1)} \leq \underbrace{\frac{210 - 200}{\sqrt{400}}}_{= 0{,}5}\Big) = \Phi(0.5) = \boxed{0{,}691}$$

b) Vi har att $P(\xi_i \geq 2) = \int_2^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x/2} dx = e^{-1} \approx 0{,}368$
Låt η = antalet hela smartphones efter 2 år.
Då är η $Bin(n = 100, p = 0.368)$. Eftersom
$np(1-p) \approx 23{,}25 > 5$ så är η approx $N(np, np(1-p))$
$= N(36{,}8, 23{,}23)$. Således blir $P(\eta \leq 53) =$
$= P\left(\frac{\eta - 36{,}8}{4{,}82} \leq \frac{53 - 36{,}8}{4{,}82}\right) \approx \Phi(3{,}36) \approx \boxed{0{,}9996}$

4 a) Låt ξ = vandringstiden.

$$P(\xi \leq 1{,}5 \mid A) = \int_0^{1{,}5} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} dx = \left[-e^{-x/2}\right]_0^{1{,}5} = 1 - e^{-3/4}$$

$$P(\xi \leq 1{,}5 \mid B) = \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - e^{-1}$$

$$\Longrightarrow P(\xi \leq 1{,}5) = P(\xi \leq 1{,}5 \mid A) \cdot P(A) + P(\xi \leq 1{,}5 \mid B) P(B)$$

$$= (1 - e^{-3/4}) \cdot \frac{1}{4} + (1 - e^{-1}) \cdot \frac{3}{4} = 1 - \frac{e^{-3/4}}{4} - \frac{3e^{-1}}{4} \approx \boxed{0{,}6060}$$

b) $$P(A \mid \xi \leq 1{,}5) \underset{\uparrow}{=} \frac{P(\xi \leq 1{,}5 \mid A) P(A)}{P(\xi \leq 1{,}5)} = \frac{(1 - e^{-3/4}) \cdot \frac{1}{4}}{1 - \frac{e^{-3/4}}{4} - \frac{3e^{-1}}{4}} \approx \boxed{0{,}2177}$$

Bayes sats

5.) a) Sannolikhetstätheten för X ges av

$$f_X(x) = \int_{y=0}^{\infty} f(x,y) dy = \int_{y=0}^{\infty} e^{-x-y} dy = e^{-x}.$$

Så $$E(e^{X/2}) = \int_0^{\infty} e^{x/2 - x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x/2} dx = \left[-2e^{-x/2}\right]_0^{\infty}$$

$$= \boxed{2}$$

b) $$P(Z \leq z) = P(X \leq Yz) = \int_{y=0}^{\infty} \int_{x=0}^{yz} e^{-x-y} dx dy$$

$$= \int_{y=0}^{\infty} e^{-y} \left[-e^{-x}\right]_0^{yz} dy = \int_{y=0}^{\infty} e^{-y}(-e^{-yz} + 1) dy = \int_0^{\infty} -e^{-y(1+z)} + e^{-y} dy$$

$$= \left[\frac{e^{-y(1+z)}}{(1+z)} - e^{-y}\right]_0^{\infty} = 1 - \frac{1}{(1+z)}.$$

Så $$f_Z(z) = \frac{d}{dz} P(Z \leq z) = \frac{d}{dz}\left(1 - \frac{1}{(1+z)}\right) = \boxed{\frac{1}{(1+z)^2}, \quad \text{för } z \geq 0}$$

6. a) Ett 95% uppåt begränsat intervall ges av

$$\left(-\infty,\ \bar{x} + c\cdot\frac{s}{\sqrt{9}}\right] \quad \text{där} \quad F_{t(8)}(c) = 0{,}95.$$

Från tabell fås att $c = 1{,}8595$ så intervallet blir

$$\left(-\infty,\ 4{,}2 + \frac{1{,}8595\cdot 0{,}1}{\sqrt{9}}\right] = (-\infty,\ 4{,}2620]$$

b) En-sidigt t-test. Det gäller att $F_{t(8)}(-2{,}8965) = 0{,}01$.
Således skall vi förkasta H_0 om

$$T = \frac{\bar{X} - 4{,}4}{S/\sqrt{9}} \le -2{,}8965.$$ Vår observation av T

ges av $$t = \frac{4.2 - 4{,}4}{0.1/3} = -6 < -2{,}8965.$$

Således kan H_0 förkastas på signifikansnivå 1%

---

7 a) X är $Hyp(N=50,\ p=\frac{k}{50},\ n=10)$.

b) $$E(X) = n\cdot p = 10\cdot\frac{k}{50} = \frac{k}{5}$$

Eftersom vi observerat $X = 6$ fås momentskattningen k^* genom att lösa ekvationen $6 = \frac{k^*}{5}$, dvs $k^* = 6\cdot 5 = \boxed{30}$

8.

a) Sida 283 i kursboken ger att ML-skattningen blir $a^* = \max(U_1, \ldots, U_5)$

b) Sida 283 i kursboken ger att $E(a^*) = \frac{5}{6} a$.
Således är a^* ej en väntevärdesriktig skattning av a.

c) Till exempel, låt $\hat{a} = 2 \cdot \frac{(U_1 + \ldots + U_5)}{5}$.
Då ser vi att $E(\hat{a}) = \frac{2}{5} \cdot \sum_{i=1}^{5} E(U_i) = \frac{2}{5} \cdot 5 \cdot \frac{a}{2} = a$,
dvs $\hat{a}$ är väntevärdesriktig skattning av a.