Lösningar övningstentamen

1. Låt X_i = antal bilar för familj i $(i = 1, \ldots, 100)$

$$\mu = E(X_i) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

$$E(X_i^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = V(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{V(X_i)} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Totala antalet bilar $= T = \sum_{i=1}^{100} X_i$. Om vi antar att X_i-variablerna är oberoende så ger centrala gränsvärdessatsen att $T \approx N(100 \cdot 1,\ 100 \cdot \frac{1}{2}) = N(100, 50)$

$$P(\text{platserna räcker}) = P(T \leq 110) = P\left(\frac{T-100}{\sqrt{50}} \leq \frac{110-100}{\sqrt{50}}\right)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{50}}\right) = \Phi(\sqrt{2}) \approx \Phi(1{,}41) \underset{\text{tabell}}{\approx} \boxed{0{,}92} \leftarrow \text{SVAR}$$

---

2. Y är en diskret slumpvariabel som kan anta värdena 1, 2, 3.

$$P(Y = 1) = P(\text{boll 1 dras 3 ggr}) + P(\text{boll 2 dras 3 gånger}) + P(\text{boll 3 dras 3 ggr}) = 3 \cdot P(\text{boll 1 dras 3 ggr})$$
$$= 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$P(Y = 3) = P(\text{varje boll dras en gång}) = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

i andra dragningen måste man dra en av de 2 bollar som man inte drog i första dragningen

$$P(Y = 2) = 1 - P(Y=1) - P(Y=3) = 1 - \frac{1}{9} - \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{1+12+6}{9} = \boxed{\frac{19}{9}} \leftarrow \text{SVAR}$$

3a) Det är uppenbart att $f(x,y) \geq 0$ för alla x, y.

Dessutom har vi $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 9(1-\theta)x^2y^2 + 2\theta x \,dx\,dy$

$= \int_0^1 \left[9\frac{(1-\theta)}{3}x^3y^2 + \theta x^2\right]_0^1 dy = \int_0^1 3(1-\theta)y^2 + \theta \,dy =$

$= \left[(1-\theta)y^3 + \theta y\right]_0^1 = 1-\theta+\theta = 1$. Så villkoren för att $f(x,y)$ skall vara en sannolikhetstäthet är uppfyllda.

b) Vi skall visa att $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ om $\theta = 0$ el. 1 och att $f(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$ annars.

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^1 9(1-\theta)x^2y^2 + 2\theta x \,dy =$

$= \left[3(1-\theta)x^2y^3 + 2\theta x y\right]_0^1 = 3(1-\theta)x^2 + 2\theta x$

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^1 9(1-\theta)x^2y^2 + 2\theta x \,dx =$

$= \left[3(1-\theta)x^3y^2 + \theta x^2\right]_0^1 = 3(1-\theta)y^2 + \theta$

$\Longrightarrow f_X(x) f_Y(y) = 9(1-\theta)^2x^2y^2 + 2\theta^2 x + 3(1-\theta)\theta x^2 + 6(1-\theta)\theta x y^2$

Om $\theta = 0$ så ser vi att $f(x,y) = 9x^2y^2 = f_X(x) f_Y(y)$ OK!

$\theta = 1$ —— " —— $f(x,y) = 2x = f_X(x) f_Y(y)$ OK!

Om $\theta \neq 0$ eller 1 så innehåller $f_X(x) f_Y(y)$ bland annat en xy^2 term som inte finns i $f(x,y)$ så $f(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$.

c) Enligt b) är X & Y oberoende om $\theta = 1$, och $f_X(x) = 2x$ då $x \in [0,1]$ och $f_Y(y) = 1$ då $y \in [0,1]$. För $z \in [0,2]$ fås

$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx$. forts →

faltningsformeln

$$f_X(x) f_Y(z-x) = \begin{cases} 2x & \text{om} \quad 0 \le x \le 1 \quad \text{och} \quad \underbrace{0 \le z-x \le 1} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 \le x - z \le 0$$

$$\Leftrightarrow z-1 \le x \le z$$

Dvs: $f_X(x) f_Y(z-x) = \begin{cases} 2x & \text{om} \quad \max(z-1,0) \le x \le \min(z,1) \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

$$\Longrightarrow f_{X+Y}(z) = \int_{\max(z-1,0)}^{\min(z,1)} 2x \, dx = \left[x^2 \right]_{\max(z-1,0)}^{\min(z,1)} =$$

$$= \left(\min(z,1)\right)^2 - \left(\max(z-1,0)\right)^2$$

$$= \begin{cases} z^2 - 0^2 = z^2 & \text{om } z \in [0,1] \\ 1^2 - (z-1)^2 = 1 - (z^2 - 2z + 1) = 2z - z^2 = z(2-z) & \text{om } z \in [1,2] \end{cases}$$

Svar: $f_{X+Y}(z) = \begin{cases} z^2 & \text{då } z \in [0,1] \\ z(2-z) & \text{då } z \in [1,2] \end{cases}$

---

4 a) Låt $A = \{\text{går till sjö } A\}$

$B = \{\text{går till sjö } B\}$

$C = \{\text{fångar ingen fisk}\}$

Kom ihåg Poisson! $P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

$$P(C) \underset{\uparrow}{=} P(C|A)P(A) + P(C|B)P(B) = e^{-2} \cdot \frac{1}{4} + e^{-1} \cdot \frac{3}{4}$$

Lagen om total sannolikhet

$$= \boxed{\frac{e^{-1}}{4}(e^{-1} + 3)} \leftarrow \text{SVAR}$$

b) Söker $P(A|C)$. Enligt Bayes sats är

$$P(A|C) = \frac{P(C|A) \cdot P(A)}{P(C|A)P(A) + P(C|B)P(B)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{se a)}}}{=} \frac{e^{-2} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{e^{-1}}{4}(e^{-1}+3)} = \boxed{\frac{e^{-1}}{e^{-1}+3}} \leftarrow \boxed{\text{Svar}}$$

5. a) $\alpha = 0{,}05$, $n = 9 \Rightarrow t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0{,}025}(8) \underset{\uparrow}{=} 2{,}306$
tabell

Intervallet blir $\bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 5 \pm \frac{2.306 \cdot 1}{\sqrt{9}} = 5 \pm \frac{2{,}306}{3}$

$= \boxed{5 \pm 0{,}77} \leftarrow$ Svar

b) Eftersom 5,1 ligger i intervallet, kan $\boxed{H_0 \text{ ej förkastas}}$ på nivå $\alpha = 0{,}05$.

Eftersom det är svårare att förkasta H_0 ju lägre α väljs, så kan vi $\boxed{\text{inte heller förkasta } H_0 \text{ på}}$ nivå 0,01.

---

6. Likelihoodfunktionen ges av $L(p) = \prod_{i=1}^{3} p_X(x_i)$

$= p_X(0) \cdot p_X(1) \cdot p_X(1) = (1-p) \cdot p \cdot p = (1-p)p^2 = p^2 - p^3$

$L'(p) = 2p - 3p^2 = p(2-3p)$.

$L'(p) = 0$ om $p = 0$ eller $p = \frac{2}{3}$. Vi inser lätt att $L(p)$ har sitt maximum i $p = 2/3$.

Maximum likelihood skattningen är alltså $\boxed{p^* = \frac{2}{3}}$ $\leftarrow$ SVAR

---

7. a) $\psi_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} e^{tx} \cdot 2e^{-2x}\,dx =$

$= 2\int_0^{\infty} e^{(t-2)x}\,dx = \begin{cases} 2\left[\frac{e^{(t-2)x}}{(t-2)}\right]_0^{\infty} = \boxed{\frac{2}{2-t} \quad \text{om } t < 2} \\ \boxed{\infty \quad \text{om } t \geq 2} \end{cases}$

b) Kom ihåg: $E(X^n) = \psi_X^{(n)}(0)$.

Vi har $\psi_X'(t) = \frac{2}{(2-t)^2}$, $\psi_X''(t) = \frac{2 \cdot 2}{(2-t)^3}$, $\psi_X^{(3)} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{(2-t)^4}$ osv. Vi ser att $\psi_X^{(n)}(t) = \frac{2n!}{(2-t)^{n+1}} \Rightarrow E(X^n) = \boxed{\frac{n!}{2^n}}$

8.) Det vi skall visa är att $E(\sqrt{\bar{X}_1 \bar{X}_2}) \neq \mu$.

Oberoende ger att $E(\sqrt{\bar{X}_1 \bar{X}_2}) = E(\sqrt{\bar{X}_1})\, E(\sqrt{\bar{X}_2}) = \left(E(\sqrt{\bar{X}_1})\right)^2$

Notera att $V(\sqrt{\bar{X}_1}) = E(\bar{X}_1) - \left(E(\sqrt{\bar{X}_1})\right)^2$ ✡

Eftersom $V(\bar{X}_1) > 0$ så är $\bar{X}_1$ inte en konstant, och därför är även $V(\sqrt{\bar{X}_1}) > 0$.

Därför ger ✡ att $\left(E(\sqrt{\bar{X}_1})\right)^2 < E(\bar{X}_1)$

Så $E(\sqrt{\bar{X}_1 \bar{X}_2}) = \left(E(\sqrt{\bar{X}_1})\right)^2 < E(\bar{X}_1) = \mu$.

#