LÖSNINGSFÖRSLAG PÅ MATEMATISK STATISTIK TMA321, IFYSIK21, 26 MAJ 2014.

AV OLLE NERMAN

---

1. $P(X>5)=0,5$, $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ $\Rightarrow 1-\Phi\left(\frac{5-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{5-\mu}{\sigma}=0 \Rightarrow \mu=5$,

$P(X>10)=0,01 \Rightarrow \Phi\left(\frac{10-5}{\sigma}\right)=0,99 \Rightarrow \frac{5}{\sigma}=2,33$

$\Rightarrow \sigma=\frac{5}{2,33}\approx 2,15$

---

2. a. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} c\cdot g(x,y)\,dx\,dy=1 \Rightarrow \int_0^1\left(\int_0^2 c\,x\,y\,dy\right)dx=1$

$\Leftrightarrow 1=c\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1\cdot\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2=c\cdot\frac{1}{2}\cdot 2=c \quad \therefore c=1$

b. $E[X]=\int_0^1\left(\int_0^2 x\cdot xy\,dy\right)dx=\frac{2}{3}$ $\quad E[Y]=\int_0^1\left(\int_0^2 y\,xy\,dy\right)dx=\frac{4}{3}$

$E[XY]=\int_0^1\left(\int_0^2 xy\cdot xy\,dy\right)dx=\frac{8}{9} \Rightarrow KOV[X,Y]=0 \Rightarrow \rho_{X,Y}=0.$

c. $E[ZX]=E[X^2Y]=\int_0^1\left(\int_0^2 x^2y\cdot xy\,dy\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1\cdot\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^2=\frac{8}{12}$

$KOV[Z,X]=E(ZX)-E[Z]\cdot E[X]=\frac{8}{12}-\frac{8}{9}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$

---

3 a. $M(t)=E[e^{tX}]=\frac{1}{3}(e^{-t}+1+e^{2t})$

b. $M(t)=E\left[e^{t\frac{(X_1+X_2)}{2}}\right]\underset{\uparrow\text{OBER}}{=}E\left[e^{t\frac{X_1}{2}}\right]\cdot E\left[e^{t\frac{X_2}{2}}\right]=\left(M\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2$

$=\frac{1}{3}\left(e^{-\frac{1}{2}t}+1+e^{t}\right)^2$

---

4. a. $\{N(5)=0\}$ RESP $\{N(7)=0\}$ ÄR A RESP B.

b. ~~[illegible]~~ $B\subseteq A \Rightarrow P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1$

c. $B\subseteq A \Rightarrow P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{e^{-3\cdot 7}}{e^{-3\cdot 5}}=e^{-6}$

---

5. a. H_0: X = ANTALET NOLLOR $\sim BIN(2000, \frac{1}{37})$

b. C.GR.V.S. $\Rightarrow X \approx N\left(\frac{2000}{37}, 2000\cdot\frac{1}{37}\cdot\frac{36}{37}\right)$

c. FÖRKASTA FÖR SMÅ VÄRDEN PÅ X

d. FÖRKASTA FÖR $X\leq C$ DÄR $P_{H_0}(X\leq C)\approx 0,05$

MED HJÄLP AV b FÅS $C\approx\frac{2000}{37}-1,65\sqrt{2000\,\frac{36}{37^2}}$

$\approx 42.$

LÖSNINGSFÖRSLAG PÅ TMA 321, 26 MAJ 2014, FORTS.
OLLE NERMAN

---

6. a. $E[X_i] = 0\cdot(1-p)^2 + 1\cdot 2p(1-p) + 2p^2 = 2p$

EKV. FÖR MOMENTMK. $\hat{p}$: $2\hat{p} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

$\Rightarrow \hat{p} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{200} X_i}{400}\right)$

b. $E[\hat{p}] = \frac{\sum_{i=1}^{200} E[X_i]}{400} = \frac{200\cdot 2p}{400} = p \Rightarrow$ SVARET: $\hat{p}$ ÄR VÄNTEVÄRDESRIKTIG.

---

7 a. OM $\sum_{i=1}^{1000} X_i < 10500$ SÅ FLER ÄN 1000 MYNT I PÅSEN. MEN $\sum_{i=1}^{1000} X_i \approx N(10550, 1000\cdot 0{,}2^2)$ ENLIGT CENTR. GRÄNSVÄRDESSATSEN $\Rightarrow$

P(FLER ÄN 1000 MYNT I PÅSEN) $\approx \Phi\left(\frac{-50}{\sqrt{1000}\cdot 0{,}2}\right) = \Phi(-7{,}9) = 1-\Phi(7{,}9)$ (NÄRA NOLL)

b. PÅ S.S. FÖR 999 MYNT

P(FLER ÄN 99 MYNT I PÅSEN) $\approx \Phi\left(\frac{-39{,}45}{\sqrt{999}\cdot 0{,}2}\right) = \Phi(-6{,}24) = 1-\Phi(6{,}24)$ (NÄRA NOLL)

c. P(EXAKT 1000) = P(FLER ÄN 999) − P(FLER ÄN 1000) $\approx$ $\Phi(7{,}9) - \Phi(6{,}24) =$ NÄRA 0.

OBS! SIFFRORNA FELVALDA AV MIG! MEDDELAT PÅ SKRIVNINGEN!

---

8. a. $\bar{x} = 7$, $\bar{y} = 3{,}55$, $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{2}(x_i-\bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{2}(x_i-\bar{x})^2} = \frac{3\cdot 6{,}1 - 3\cdot 1{,}7}{18} \approx$

$\approx 0{,}733$ $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \approx -1{,}25$

$a + b\,5{,}5$ ~~= ...~~ SKATTAS AV $\hat{a} + \hat{b}\,5{,}5 = \bar{y} - 1{,}5\hat{b}$

$= 3{,}55 - 1{,}5\cdot 0{,}733 \approx 3{,}45$

b. $\hat{b} \sim N\left(b; 0{,}25\cdot\frac{1}{\sum_i (x_i-\bar{x})^2}\right) = N\left(b; \frac{1}{72}\right)$ GER

$b = \hat{b} \pm 1{,}96\cdot\sqrt{\frac{1}{72}}$ (95%) OBSERVERAT:

$b = 0{,}733 \pm 0{,}231$ (95%)

c. KORRESPONDENS MELLAN TEST OCH KONF. INTERVALL $\Rightarrow$ $0 \notin 0{,}733 \pm 0{,}231$ (95%) $\Rightarrow H_0: b = 0$ FÖRKASTAS PÅ SIGNIFIKANSNIVÅN 5%