**Tentamen i MSG100 Sannolikhetsteori 1, Göteborgs Universitet. Deltentamen 1, 7.5 hp.**

**Tid: Lördagen den 11 Januari 2014, 8.30-12.30.**

**Examinator: Olle Nerman, MV, Chalmers.**

**Jour: Henrike Häbel, Telefon: 7725380, mobil: 0730 671252.**

**Hjälpmedel: Miniräknare, egen formelsamling (4 A4-sidor på 2 blad) och till skrivningen medhörande tabeller.**

**Betygsgränser: För betyget G fordras 12 poäng, för betyget VG 20 poäng.**

---

1. Du kastar en vanlig sex-sidig tärning **6** gånger i rad. Vad är

   a. Sannolikheten att du får utfallen **1,2,3,4,5 och 6** i vilken ordning som helst. (1p)
   b. Exakt **4** utfall som är **5**. (1p)
   c. Inga utfall alls so är **1, 2** eller **6**. (1p)

2. För en viss exponentialfördelad stokastisk variabel **X** är sannolikheten att få ett utfall i intervallet **[0,1]** lika med **0,6**. Bestäm median, väntevärde och varians för **X**. (3p)

3. Antag att är Binomialfördelad med parametrar **n=5** och **p=0.3** .

   a. Bestäm momentgenererande funktionen för **Y=5-2X** . (2p)
   b. Beräkna variansen för i b-delen (t. ex. med hjälp av momentgenererande funktionen från a-delen). (2p)

4. Paprikor som slumpmässigt väljs från ett stort parti väger i genomsnitt (väntevärdet) **95** gram, och vikten varierar enligt en fördelning med en standardavvikelse som är **20** gram. Du antar (approximerar med) att successivt valda paprikor har en vikt som är oberoende av varandra och följer en fördelning med dessa parametrar.

   a. Du väljer nu **100** paprikor. Vad är (approximativt) sannolikheten att dessa tillsammans väger minst **10** Kg? (2p)

   b. Hur många paprikor behöver du minst ta för att sannolikheten för att de tillsammans skall väga minst **10** Kg skall vara större än **0.99?** (approximera på lämpligt sätt) (2p)

5. Låt **Y** vara maximum av **10** oberoende likformigt fördelade stokastiska variabler på intervallet **[0,4]**.

   a. Bestäm fördelningsfunktionen och sannolikhetstätheten för **Y**. (2p)
   b. Bestäm väntevärdet och variansen för **Y**. (2p)

VÄND!

6. Du utför en serie av oberoende försök och observerar huruvida en viss händelse **A** inträffar eller ej. Antalet försök som du behöver utföra för att händelsen skall inträffa **10** gånger är en stokastisk variabel **Y**. Sannolikheten för att A skall inträffa i en enskild försöksupprepning är **p**.

   a. Bestäm sannolikheten för händelsen $\mathbf{Y=11}$ (som funktion av **p**). (1p)
   b. Bestäm sannolikheterna för händelserna $\mathbf{Y=k}$ för alla positiva heltal **k**. (1p)
   c. Bestäm den betingade sannolikheten för att $\mathbf{\{Y=10\}}$ givet att $\mathbf{\{Y<12\}}$. (1p)

7. En multinomialfördelad stokastisk vektor (flerdimensionell stokastisk variabel) $\mathbf{(X_1,X_2,\ldots X_k)}$ uppkommer som bekant genom att man räknar antalet gånger som var och en av händelserna i en partition (med **k** händelser) av ett visst utfallsrum inträffar i en serie med **n** oberoende försöksupprepningar. Detta gör att varje $\mathbf{X_i}$ -komponent blir binomialfördelad (med sannolikhetsparameter som är sannolikheten $\mathbf{p_i}$ för respektive händelse), men $\mathbf{X_i}$-komponenterna blir beroende.

   a) Vad är kovariansen mellan två olika komponenter $\mathbf{X_i}$ och $\mathbf{X_j}$? (1p)
   b) Vad är korrelationen mellan två olika komponenter $\mathbf{X_i}$ och $\mathbf{X_j}$? (1p)
   c) Vilken fördelning får summan av två olika komponenter $\mathbf{X_i}$ och $\mathbf{X_j}$? (1p)
   d) Vad är väntevärdet och variansen för $\mathbf{X_i\text{-}X_j}$, differensen mellan två olika komponenter? (2p)

8. Markovs olikhet handlar som bekant om att uppskatta sannolikheter för svanshändelser för en positiv stokastisk variabel **X** med en övre begränsning. Genom att använda väntevärden av positiva avtagande funktioner av en inte nödvändigtvis positiv stokastisk variabel **X** kan man få alternativa uppskattningar uppåt av sannolikheterna för lämpliga händelser med liknande teknik.

   a. Låt **X** vara positiv och låt $\mathbf{Y=1/X}$ och anta att $\mathbf{E[Y]=0.12}$ . Använd detta för att uppskatta $\mathbf{P(X<0.5)}$ uppåt. (2p)
   b. Med samma definitioner som i a-uppgiften skall du bestämma ett **c** som är så stort som möjligt under villkoret att olikheten $\mathbf{P(X\leq c) \leq 0.02}$ skallvara garanterat sann. (2p)