Tentamen i TMA321 Matematisk Statistik, Chalmers Tekniska Högskola.

Hjälpmedel: Valfri räknare, egenhändigt handskriven formelsamling (4 A4-sidor på 2 blad) och till skrivningen medhörande tabeller.
Onsdagen den 28 Augusti 2013, Eftermiddag 14.00-18.00.
Examinator och Jour: Olle Nerman, tel. 7723565, rum 3056, MV, Chalmers.
Tentamen består av 8 frågor med sammanlagt 32 poäng+ eventuella bonuspoäng från dina två inlämningsuppgifter (max 4 poäng totalt).
Betygsgränser: För betyget ”3” fordras minst 15 poäng, för betyget ”4” minst 20 poäng och för betyget ”5” minst 25 poäng .

---

1. När du kastar en vanlig sex-sidig tärning en gång så är sannolikheten att du får utfallet **5** naturligtvis **1/6**. Men vad är:
   a. sannolikheten att du får ett och endast ett kast som har poängtalet lika med **5** när du kastar tärningen **6** gånger? (2p)
   b. sannolikhetsfunktionen (=frekvensfunktionen) för **X =** antalet gånger som poängtalet är lika med **5**, när du kastar tärningen **6** gånger? (2p)

2. En stokastisk variabel **X** är normalfördelad med väntevärdesparameter $\boldsymbol{\mu}$ och standardavvikelseparamaeter $\boldsymbol{\sigma}$. Bestäm båda parametrarna $\boldsymbol{\mu}$ och $\boldsymbol{\sigma}$ (med god approximation) från vetskapen att sannolikheten **P(X<3)=0.7** och sannolikheten P**(X>10)=0.01** . (3p)

3. Antag att du i samband med statistisk inferens rörande en viss fysikalisk parameter $\boldsymbol{\theta}$ gör två oberoende försök där du dels, baserat enbart på försöksresultatet i det första försöket, har en väntevärdesriktig punktskattning **Y** av $\boldsymbol{\theta}$ med det teoretiska standardfelet **1/2** och dels, baserat enbart på det andra försöket, har ännu en väntevärdesriktig punktskattning **Z** av samma parameter $\boldsymbol{\theta}$ med teoretiska standardfelet **2/3**.
   a. För vilka reella konstantkombinationer av **a** och **b** blir **T=aY+bZ** en väntevärdesriktig punktskattning av $\boldsymbol{\theta}$? (2p)
   b. Vilket av alla de möjliga **a**-**b**-paren du angivit i a-delen resulterar i det minsta standardfelet hos punktskattningen **T**? (2p)
4. Rektangulära stenplattor med oberoende längder enligt en fördelning med väntevärdet **0.5** meter och standardavvikelsen **0.1** meter (och fix bredd) läggs succesivt in i en enda rad med exakt **1** cm mellanrum mellan stenarna.
   a. Om du med metoden ovan lägger **40** stenar. Hur stor är då (approximativt) sannolikheten att den resulterande gångens längd är minst **21** meter? (2p)
   b. Hur många stenar behöver du använda för att längden av den resulterande gången skall vara minst **30** meter med en approximativ sannolikhet som är större än **0.95** ? (2p)

   VÄND!

5. Du skall observera **5** oberoende stokastiska variabler $\mathbf{X_1,\ldots,X_5}$ med samma sannolikhetstäthet som beror på en okänd positiv parameter **θ** och har formen

   $$\mathbf{p(x;\theta) = \theta\exp(\theta x)} \text{ när } \mathbf{x<0} \text{ (och } \mathbf{p(x;\theta)=0} \text{ när } \mathbf{x \geq 0}).$$

   a. Härled Maximum Likelihood-skattningen av **θ.** (2p)
   b. Vad blir den observerade Maximum Likelihood-skattningen av **θ** om du observerat **x**-variablerna **-2.1** , **-3.7** , **-5.3**, **-1.8** och **-3.1** ? (1p)
   c. Vad är väntevärdet i fördelningen bestämd av tätheten **p(x;θ)** uttryckt som funktion av **θ**? (1p)
   d. Föreslå en lämplig punktskattning av väntevärdet i fördelningen (se c-delen) baserad på $\mathbf{X_1,\ldots,X_5}$. Beräkna också ett observerat värde på denna vid samma observationsserie som i b-delen ovan. (1p)

6. I en linjär regressionsmodell av oberoende normalfördelade stokastiska variabler (**Y**) med avseende på inställningsvariabeln (**x**) antas väntevärdena på **Y**-variablerna följa det linjära sambandet **a+bx** för två okända reella parametrar **a** och **b**. Varianserna för Y-variablerna är kända och alla antas vara **=0.25**. Du observerar tre **y**-variabler till **6.2**, **1.5**, respektive **3.1** vid **x**-inställningarna **5.0** , **2.0**, respektive **4.0** .

   a. Beräkna en observerad punktskattning av regressionslinjens värde vid inställningen **x=3.0**. (1p)
   b. Beräkna ett symmetriskt konfidensintervall för riktningskoeffecienten **b** med konfidensgraden **95 %**. (2p)
   c. Testa på signifikansnivån **5 %** nollhypotesen att **b=0** mot den tvåsidiga alternativa hypotesen att $\mathbf{b \neq 0}$. Vad blir din slutsats? (motivera). (2p)

7. Sannolikheten för att en ensam passagerare som kommer till en viss taxistation i centrala Lillbacka en typisk lördagsmorgon mellan **01.00** och **03.00** är berusad är ungefär **20%**. Erfarenhetsmässsigt kommer ensam-kunderna som är berusade att krångla vid betalningen med en sannolikhet som är ungefär **4%**. De nyktra kunderna däremot krånglar bara med betalningen med ungefär **0.5%** sannolikhet. Du sitter i taxibolagets växel och får ett larm från en taxichaufför, som just haft en körning från stationen, att han har en ensam-kund som krånglar med betalningen. Aha, säkert en ”fyllerist” tänker du. Uppskatta sannolikheten (den betingade) att din fördomsfulla slutsats är riktig? (3p)

8. I en Poissonprocess med intensiteten **3** pulser per tidsenhet:
   a. Vad är sannolikheten för händelsen
      A=det kommer inga pulser alls i tidsintervallet i **[4,6]** ? (1p)
   b. Nu observerar du bara dels hur många kunder **X** som kommer totalt under tidsintervallet **[0,5]**, dels totala antalet kunder **Y** som kommer under det längre tidsintervallet **[0.10]**. Antag att observationerna är **x=10** och **y=27**. Beräkna den betingade sannolikheten för händelsen **A** (definierad som i a-delen) givet att **X** och **Y** fått just dessa utfall (d.v.s beräkna **P(A| B)** där $\mathbf{B=\{X=10\}\cap\{Y=27\}}$). (3p)