Tentamen i MSG100 Sannolikhetsteori 1, Göteborgs Universitet. Del 2, 7.5 hp.
Tid: Lördagen den 1 September 2012, kl. 14.00-18.00.
Examinator: Olle Nerman.
Telefonjour på Mobiltelefon: 0736-996659. Jour: Magnus Önnheim .
Hjälpmedel: Miniräknare, egen formelsamling (4 A4-sidor på 2 blad) och till skrivningen medhörande tabeller.
Betygsgränser: För betyget G fordras 12 poäng, för betyget VG 20 poäng.

---

1. Förklara följande:
   a. Begreppen **nollhypotes** och **mothypotes** i samband med hypotesprövning . Hur bör man resonera när man specificerar dessa? (2p)
   b. Begreppen **signifikansnivå** och **p-värde**. Hur hänger dessa båda begrepp ihop? (2p)
2. Du utför en serie av oberoende försök och observerar huruvida en viss händelse **A** inträffar eller ej. Antalet försök som du behöver utföra för att händelsen ska inträffa **10** gånger är en stokastisk variabel **Y**. Sannolikheten för att **A** ska inträffa i en enskild försöksupprepning är **p**.Bestäm formeln för ML-skattningen (estimatorn) av **p** baserad på en enda observation av **Y**. (3p)
3. Du har två oberoende stickprov av storlek **3** resp **8** med olika okända väntevärden och där de teoretiska standardavvikelserna antas vara lika. Stickprovsvarianserna har observerats till **0.36** respektive **0.81** .
   a. Beräkna en observerad punktskattning av den gemensamma standardavvikelsen på lämpligt sätt. (2p)
   b. Beräkna en observerad punktskattning av standardavvikelsen för differensen av medelvärdena i de båda stickproven. (2p)
4. I en linjär regressionsmodell av oberoende normalfördelade stokastiska variabler (**Y**) med avseende på inställningsvariabeln (**x**) antas väntevärdena på **Y**-variablerna följa det linjära sambandet **a+bx**. Varianserna för samtliga **Y**-variablerna antas vara samma och okända.

   a. Beräkna maximum likelihoodskattingen av interceptparametern **a** om du har fyra **y-**observationer: **1.5**, **2.8**, **4.1** respektive **6.0**, vid **x**-inställningarna **-1**, **2**, **3** respektive **5**. (2p)
   b. Beräkna en punktskattning för standardavvikelseparametern (för de enskilda residualerna) i modellen. (1p)
   c. Beräkna ett symmetriskt **95%** -konfidensintervall för a. (2p)
   d. Beräkna ett symmetriskt **95%** -prediktionsintervall för en ny observation vid inställningen **x=0.8** . (1p)

5. a. Hur kan man simulera en Poissonprocess på **[0,∞)** med intensiteten **5** pulser/tidsenhet utgående från en följd av oberoende exponentialfördelade (**1**) variabler ? (2p)

Vänd!

b. Vilken fördelningsfunktion har **Y**= den tredje puls-punkten i en Poissonprocess definierad som i a. (2p)

c. Vilken frekvensfunktion har **Y** definierad som i b. (1p)

6. I ett normalfördelningsstickprov med **10** observationer har någon beräknat stickprovsmedelvärdet och stickprovsstandardavvikelsen till **15.35** och **0.47**.

   a. Du ombeds att förvandla informationen till ett symmetriskt konfidensintervall för det bakomliggande väntevärdet **μ** för de enskilda observationerna med konfidensgraden **99%**. Vad blir resultatet? (2p)

   b. Du ombeds istället att pröva nollhypotesen $\mathbf{H_0}$: väntevärdet**=15** med signifikansnivån **5%** mot den alternativa hypotesen $\mathbf{H_1}$: väntevärdet **>** **15**. Vad blir då din slutsats? (2p)

7. I en Brownsk rörelse $\{X(t), t \geq 0\}$ är variansen vid tidpunkten **3**, **Var[X(3)]=1**.

   a. Vad är sannolikheten att infimum (minsta värdet) av den Brownska rörelsen under tidsintervallet **[0, 12]** är mindre än **-2**? (Med andra ord: beräkna $P(\inf \{X(t);\ t \in [0, 10]\} < -2)$ (2p)

   b. Bestäm sannolikhetstätheten för $Y = \sup \{X(t);\ t \in [0, 12]\}$ (d.v.s. för maximum =supremum av **X**-processen i tidintervallet **[0,12]**). (2p)