

Tentamen i MSG100 Sannolikhetsteori 1, Göteborgs Universitet. Deltentamen 2, 7.5 hp.

Tid: Torsdagen den 29 Augusti 2013, kl. 14.00-18.00.

Examinator: Olle Nerman.

Jour: Olle Nerman, telefon 772 3565

Hjälpmedel: Miniräknare, egen formelsamling (4 A4-sidor på 2 blad) och till skrivningen medhörande tabeller.

Betygsgränser: För betyget G fordras 12 poäng, för betyget VG 20 poäng.

1. I ett normalfördelningsstickprov med **10** observationer har någon beräknat stickprovsmedelvärde och stickprovsstandardavvikelsen till **15.35** respektive **0.47**.
 - a. Du ombeds att förvandla informationen till ett symmetriskt konfidensintervall för det bakomliggande väntevärdet μ för de enskilda observationerna med konfidensgraden **99%**. Vad blir resultatet? (2p)
 - b. Du ombeds istället att pröva nollhypotesen H_0 : väntevärdet=**15** med signifikansnivån **1%** mot den alternativa hypotesen H_1 : väntevärdet $\neq 15$. Vad blir då din slutsats? (2p)

2. Du utför en serie av oberoende försök och observerar huruvida en viss händelse **A** inträffar eller ej. Antalet försök som du behöver utföra för att händelsen skall inträffa **20** gånger är en stokastisk variabel **Y**. Sannolikheten för att **A** skall inträffa i en enskild försöksupprepning är **p**.
 - a. Bestäm sannolikheten för händelsen $Y=20$ som funktion av parametern **p**. (1p)
 - b. Bestäm sannolikheterna för händelserna $\{Y=k\}$ för alla positiva heltal **k**. (1p)
 - c. Bestäm formeln för Maximum Likelihood-skattningen av **p** baserad på observation av **Y** (en enda observation). (2p)
 - d. Hur ser lämpligen förkastelseområdet ut om du testat nollhypotesen att $p=0.6$ mot alternativhypotesen att $p>0.6$ med signifikansnivån **5%** och använder **Y** som testvariabel? (2p)

3. Betrakta en standard Brownsk rörelse $\{B(t)\}$.
 - a. Vilken frekvensfunktion har $X=\text{maximum av } B(t) \text{ över } t \text{ i intervallet } [0,2]$ (2p)
 - b. Ange den tvådimensionella frekvensfunktionen för den tvådimensionella vektorn med komponenterna X (definierad som i a-delen) och $Y=(B(4)-B(2))$? (Motivera!) (2p)

VÄND!

4. Du skall observera ett stickprov av storleken **100** från en fördelning med kontinuerlig fördelningsfunktion **F**.

a. Hur definieras empiriska fördelningsfunktionen? (1p)

b. Du vill testa om din förmodan att fördelningsfunktionen i punkten $x=3$ är mindre än **0.5**. Därför ansätter du nollhypotesen $H_0: F(3) \geq 0.5$ (med bokens sätt att förenkla $F(3)=0.5$). Hur ser mothypotesen/alternativhypotesen ut? (1p)

c. Testet tänker du utföra med approximativ signifikansnivån **0.05** med hjälp av empiriska fördelningsfunktionen evaluerad i punkten **3** som testvariabel **T**. För vilka utfall på **T** bör du förkasta H_0 ? (2p)

d. Beräkna approximativa styrkan för testet i uppgift c för ett alternativ där $F(3)=0.3$. (2p)

VÄND!

5. Betrakta en Poissonprocess $\{X(t), t \geq 0\}$ med intensiteten **5** (pulser/tidenhet).

a. Vilken fördelning får $X(3)$ =antalet pulser intervallet $[0,3)$ (1p)

b. Vilken fördelning får $X(3)$ definierad som i a-delen om du betingar med att antalet pulser i intervallet $[2,3)=0$, d.v.s. betingar med att $X(3)-X(2) = 0$? (2p)

c. Med samma definitioner som i a-delen: vilken sannolikhetsfunktion får $X(3)$ betingat med att $X(2)-X(1)=1$? (2p)

6. I en enkel linjär regression med svarsvariabler **y** och inställningsvariabler **x** blev summan av de $n=5$ beroende **y**-variablerna **5,3** och medelvärdet av **x**-variablerna var **0.32**. Skattningen av riktningskoefficienten för regressionslinjen β blev **0.36**.

a. Beräkna en observerad punktskattning av regressionslinjens intercept α . (1p)

b. Beräkna en punktskattning av väntevärdet (av **Y**) vid inställningen $x=2$. (1p)

c. Antag att de teoretiska felvarianserna i den linjära regressionsmodellen för **Y**-variablerna i regressionsmodellen är kända och att alla är lika med **0.25**. Antag vidare att residualerna (=felen) är oberoende och normalfördelade, och att den (på vanligt enstickprovs-vis) beräknade ”stickprovsvariansen” för de deterministiska **x**-variablerna är **0.51**. Vilken fördelning har då den teoretiska punktskattningen av β ? (1p)

d. Använd resultatet i c för att beräkna ett observerat uppåt begränsat konfidensintervall för riktningskoefficienten β med konfidensgraden **95%**. (2p)