

Tentamen i MSG100 Sannolikheteori 1, Göteborgs Universitet. Deltentamen 2, 7.5 hp.

Tid: Onsdagen den 18 December 2013, kl. 8.30-12.30.

Examinator: Olle Nerman.

Jour: Olle Nerman, telefon 772 3565

Hjälpmedel: Miniräknare, egen formelsamling (4 A4-sidor på 2 blad) och till skrivningen medhörande tabeller.

Betygsgränser: För betyget G fordras 12 poäng, för betyget VG 20 poäng.

1. I en Poissonprocess med intensiteten c pulser per tidsenhet observerar du att det kommer **307** pulser under ett tidsintervall med längden **25** tidsenheter.
 - a. Punktskatta c på lämpligt sätt. (1p)
 - b. Är den bakomliggande teoretiska punktskattningen i a-svaret väntevärdesriktig? (Motivera) (1p)
 - c. Ange ett tvåsidigt begränsat observerat approximativt konfidensintervall för c med approximativ konfidensgrad **5%**. (2p)

2. Betrakta en normalfördelningsmodell för två oberoende stickprov med gemensam okänd variansparameter. Antag att du har **5**, respektive **10** observationer i respektive stickprov och att du observerar de aritmetiska medelvärdena i dessa stickprov till **2.51** respektive **3.77**. Standardfelen, hos dessa naturliga punktskattningar av respektive väntevärden, är skattade separat med hjälp av respektive stickprovs stickprovsvarianser till **0.35** respektive **0.51**.
 - a. Du inser att man kan skatta dessa standardfel bättre genom att utnyttja den sammanvägda (=poolade) variansskattningen istället. Hur blir de två modifierade skattningarna av respektive standardfel? (2p)
 - b. Vilket värde får den naturliga skattningen av standardfelet av skattningen av differensen av de två väntevärdena? Och vad blev den observerade skattningen av differensen mellan de två väntevärdena?) (2p)

3. Redogör för begreppen signifikansnivå, styrka och p-värde i samband med hypotesprövning av en viss nollhypotes. (3p)

4. Du misstänker att en viss "Croupier" (han som snurrar roulette-hjulet och sätter fart på kulan) är skicklig på att kasta så att sannolikheten för **0** är lite större än den borde (den skall vara **1/37** om han inte fuskar). Därför tänker du med stort tålamod hålla reda på hur många nollor som resulterar från **1500** Roulette-omgångar (hela semestern går nog tyvärr åt). Syftet är att försöka bevisa hans fusk med statistisk hypotesprövning.
 - a. Vad är den naturliga nollhypotesen för dig i denna situation och vilken fördelning har X = antalet nollor bland de **1500** omgångarna under antagande av denna för dig naturliga nollhypotesen? (1p)
 - b. Hur kan du approximera fördelningen för X under nollhypotesen? (1p)
 - c. Vilka utfall på X , stora, små (eller både stora och små), bör du välja som förkastelseområde vid ett formellt hypotestest? (Diskutera gärna) (1p)
 - d. Använd approximationsideerna i b. (och resultatet i c) för att bestämma förkastelseområdet vid signifikansnivån $\alpha = 0.01$ (2p)

VÄND!

5. I en standard Brownsk rörelse $\mathbf{X}(t)$, $t \geq 0$ som startar i $\mathbf{X}(0)=\mathbf{0}$ studerar du fördelningen för $\mathbf{Y}(t)=\mathbf{X}(t)-t\mathbf{X}(1)$ för tidpunkter t i intervallet $[0,1]$. Bestäm
- Väntevärdet och variansen för $\mathbf{Y}(1/3)$ (2p)
 - Fördelningen för $\mathbf{Y}(1/3)$ (1p)
 - Korrelationen mellan $\mathbf{Y}(1/3)$ och $\mathbf{Y}(1/2)$ (1p)
6. I en enkel linjär regression med svarsvariabler y och inställningsvariabler x blev summan av de $n=5$ beroende y -variablerna **5,3** och medelvärdet av x -variablerna var **0.32**. Skattningen av riktningskoefficienten för regressionslinjen β blev **0.36**.
- Beräkna en observerad punktskattning av regressionslinjens intercept α . (1p)
 - Beräkna en punktskattning av väntevärdet (av \mathbf{Y}) vid inställningen $x=3$. (1p)
 - Antag att de teoretiska felvarianserna i den linjära regressionsmodellen för \mathbf{Y} -variablerna i regressionsmodellen är kända och att alla är lika med **0.25**. Antag vidare att residualerna (=felen) är oberoende och normalfördelade, och att den (på vanligt enstickprov-vis) beräknade ”stickprovsvariansen” för de deterministiska x -variablerna är **0.2**. Vilken fördelning har då den teoretiska punktskattningen av α ? (1p)
 - Använd resultatet i c för att beräkna ett observerat nedåt begränsat konfidensintervall för riktningskoefficienten α med konfidensgraden **95%**. (2p)
7. I ett viss enkelt genetiskt korsningsförsök med **200** upprepningar, så säger teorin att varje enskild avkomma i korsningsförsöket skall ha **0**, **1** eller **2** kopior av en viss genetisk kod, med sannolikheter som är $(1-p)^2$, $2p(1-p)$ respektive p^2 . Här är p en okänd sannolikhet som vi vill bestämma. Dessutom gäller att alla försökets **200** ”avkommor” kan antas ha oberoende antal kopior av koden ifråga.
- Vad är likelihoodfunktionen L , för hela försöket (inför själv lämplig notation)? (1p)
 - Använd likelihoodfunktionen och härled hur ML-skattning av p ser ut. (2p)
 - Hur ser en observerad ML-skattning ut om **102** av avkommorna har **0** kopior, **68** har 1 kopia och **30** har **2** kopior av koden ifråga? (1p)
 - Är skattningen av p i b-uppgiften väntevärdesriktig? (1p)

Lycka Till!