$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1-2s & -2(1-s) & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2(1-s) & 1 \end{pmatrix}$$

löser ekvationerna. Beräkna sedan P_n.

Anmärkning. Ofta är det omöjligt att beräkna P_n explicit. Man får vara nöjd om det går att bestämma P! Detta medför ej att Markovteori är oanvändbar: Tvärtom är det en av grundvalarna för modern matematik och matematisk statistik att betydelsen av explicita beräkningar väsentligt nedtonats. Mer kan visas och förståelse bli bättre vid symbolisk analys!

10.6. Låt M vara en $n|n$-matris med distinkta egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. I övning 10.5 c beräknades M^ℓ via diagonalisering $M = Q^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)Q$ för någon $n|n$-matris Q. Det är arbetsamt att bestämma och invertera Q: Här visas hur arbetet kan reduceras med hjälp av teori för matrisfunktioner (som occkså behövs för studiet av tidskontinuerliga kedjor).

a) Det karakteristiska polynomet ρ_M för M definieras

$$\rho_M(\lambda) = \det(\lambda I - M) = \textstyle\sum_{k=0}^n m_k \lambda^k = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} m_k \lambda^k.$$

Använd $M = Q^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)Q$ till att visa *Cayley*[2]*-Hamilton*[3]*s sats*:

$$\rho_M(M) = \textstyle\sum_{k=0}^n m_k M^k = M^n + \sum_{k=0}^{n-1} m_k M^k = 0.$$

b) Använd delövning a och induktion till att visa sambandet

$$M^\ell = \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \hat{m}_k^{(\ell)} M^k \quad \text{för } \ell \in \mathbb{N}, \quad \text{för något val av } \hat{m}_0^{(\ell)}, \dots, \hat{m}_{n-1}^{(\ell)} \in \mathbb{R}.$$

Man kan på analogt sätt visa (men gör ej det) att det finns en konstant $K > 0$ sådan att $|\hat{m}_k^{(\ell)}| \le (K\,n)^\ell$ för $\ell \in \mathbb{N}$.

c) Visa att matrisnormen $\|A\| = \big[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (A)_{ij}^2\big]^{1/2}$ för $n|n$-matriser A och B satisfierar $\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$, med hjälp av

$$\text{Cauchy–Schwarz olikhet:} \qquad \Big|\textstyle\sum_{k=1}^n a_k b_k\Big|^2 \le \big(\sum_{k=1}^n a_k^2\big)\big(\sum_{k=1}^n b_k^2\big).$$

d) Visa att för matrisnormen i delövning c $\|A^\ell\| \le \|A\|^\ell$ för $\ell \in \mathbb{N}$.

e) Visa med hjälp av delövning c och d att $|(A^\ell)_{ij}| \le \|A\|^\ell$ för $\ell \in \mathbb{N}$.

f) Givet $n|n$-matriser $B_0, B_1, \dots$ så konvergerar $\sum_{\ell=0}^L B_\ell$ då $L \to \infty$ med gränsvärde $B = \sum_{\ell=0}^\infty B_\ell$ om summan konvergerar elementvis, dvs. om

[2]Engelske matematikern A. Cayley 1821–1895.

[3]Engelske matematikern W.R. Hamilton 1805–1865.

$$\big(\sum_{\ell=0}^{L} B_\ell\big)_{ij} = \sum_{\ell=0}^{L} \big(B_\ell\big)_{ij} \to (B)_{ij} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \big(B_\ell\big)_{ij}.$$

För en hel analytisk funktion $f(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell z^\ell$, $z \in \mathbb{C}$ (med absolutkonvergens), definieras $f(M) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell M^\ell$: Visa med hjälp av delövning e att summan $f(M) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell M^\ell$ verkligen konvergerar.

g) Visa att för en hel analytisk funktion $f(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell z^\ell$, $z \in \mathbb{C}$, är

$$f(M) = Q^{-1}\mathrm{diag}(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n))Q.$$

h) Visa med hjälp av delövning b att för $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hel analytisk är

$$f(M) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{m}_k^{(f)} M^k \quad \text{för något val av } \hat{m}_0^{(f)}, \ldots, \hat{m}_{n-1}^{(f)} \in \mathbb{C}.$$

i) Visa att för $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hel analytisk gäller att

$$f(M) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{m}_k^{(f)} M^k \;\Rightarrow\; f(M) = Q^{-1}\mathrm{diag}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} \hat{m}_k^{(f)} \lambda_1^k, \ldots, \sum_{k=0}^{n-1} \hat{m}_k^{(f)} \lambda_n^k\Big)Q.$$

j) Visa med hjälp av delövning g–i att för $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hel analytisk är

$$f(M) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{m}_k^{(f)} M^k \quad \text{där} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \hat{m}_k^{(f)} \lambda_\ell^k = f(\lambda_\ell) \quad \text{för} \quad \ell = 1, \ldots, n.$$

Allstå fås $\{\hat{m}_k^{(f)}\}$ i formeln för f i delövning h genom att lösa ett $n|n$-ekvationssystem, vilket är mindre arbete än att bestämma och invertera Q.

Anmärkning. För en $n|n$-matris M med $\hat{n} < n$ distinkta egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_{\hat{n}}$ med multipliciteter $m_1, \ldots, m_{\hat{n}}$, dvs. $\rho_M(\lambda) = \prod_{\ell=1}^{\hat{n}} (\lambda - \lambda_\ell)^{m_\ell}$, gäller formeln i övning 10.6 h, men koefficienterna bestäms av ekvationerna

$$\frac{d^m}{d\lambda^m} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{m}_k^{(f)} \lambda^k \Big|_{\lambda=\lambda_i} = \frac{d^m f(\lambda)}{d\lambda^m}\Big|_{\lambda=\lambda_i} \quad \text{för} \quad m = 0, \ldots, m_i - 1, \; i = 1, \ldots, \hat{n}.$$

10.7. Bestäm $m_0^{(n)}, m_1^{(n)}, m_2^{(n)} \in \mathbb{R}$ så att $P^n = m_0^{(n)} I + m_1^{(n)} P + m_2^{(n)} P^2$ för kedjan $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i exempel 10.3 (men P^n behöver ej beräknas). Uttryck på samma vis $\mathrm{e}^P = m_0^{(\exp)} I + m_1^{(\exp)} P + m_2^{(\exp)} P^2$. Utnyttja att

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-r & (1-r)^2 \\ 1 & (1-r)^2 & (1-r)^4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{(1-r)^3}{(2-r)r^2} & -\dfrac{1-r}{r^2} & \dfrac{1}{(2-r)r^2} \\ -\dfrac{1-r}{r^2} & \dfrac{1}{(1-r)r^2} + \dfrac{1-r}{r^2} & -\dfrac{1}{(1-r)r^2} \\ \dfrac{1}{(2-r)r^2} & -\dfrac{1}{(1-r)r^2} & \dfrac{1}{(1-r)(2-r)r^2} \end{pmatrix}$$

10.8 a) Bestäm perioderna $d(0)$–$d(2)$ för kedjan $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i exempel 10.3.