Mat. stat., GU-fysik, ht2018, Föreläsning 5.2

Förra gången introducerade vi hypotesprövning, som är ett viktigt statistiskt sätt att resonera utifrån metodiken:

(i) Bestäm testvariabel (t.ex. $\bar{x}$ eller t)

ibland (ii) Ställ upp H_0 och H_1

(iii) Ta fram testet utifrån signifikansnivån:

$$\alpha = P(\text{förkasta } H_0 \mid H_0 \text{ sann})$$

(dvs k, k_1, k_2)

Alternativt: Beräkna $P = P(\text{testvariabelns värde} \mid H_0 \text{ sann})$

(iv) Genomför testet / Jämför P med α eller $\alpha/2$.

Som H_0 väljs "i allmänhet" det man vill motbevisa. Antag t.ex. att vi har två konkurrenter A och B som påstår att $\mu = 200$ v.s. $\mu = 190$. A bör då låta $H_0: \mu = 190$ och visa att $P(\text{testvariabelns värde} \mid H_0 \text{ sann})$ är "löjligt liten", och vice versa för B.

Teckentest:

I många situationer har man ingen aning om vilken fördelning som observationerna kommer ifrån. Det har därför utvecklats en mängd tester som inte förutsätter någon kännedom om detta. Dessa tester kallas med ett gemensamt namn för <u>icke-parametriska</u> tester.

Teckentestet är ett icke-parametriskt test som används om man har en situation med stickprov i par, men inte kan göra något normalfördelningsantagande. Det finns flera olika varianter, men vi kommer bara att studera den mest grundläggande av dessa.

Ex. Man har grävt ner 15 ytbehandlade och 15 obehandlade stålrör parvis. Efter en tid grävde man upp rören och kontrollerade i hur många par som det behandlade röret rostat mest. Man fann 3 där det behandlade röret rostat mest. Kan man med 5% felrisk påstå att ett ytbehandlat rör i genomsnitt rostar mindre än ett obehandlat?

Lösn.: Vi vill testa

H_0: rören rostar lika mycket

mot

H_1: behandlade rör rostar mindre

Låt x = antal par av 15 där det behandlade röret har rostat mest

Det enda vi vet är att $x = 3$.

Om H_0 är sann är det lika stor sannolikhet att ett behandlat rör rostar mer än ett obehandlat.

Alltså borde x ligga kring 7/8 och vara en observation på $X \in Bin(15, 0.5)$.

Hur sannolikt är det att $x \leq 3$ i så fall? Jo.

$$P = P(X \leq 3 \mid X \in Bin(15, 0.5)) = P(X=0) + P(X=1) +$$
$$+ P(X=2) + P(X=3) = \binom{15}{0} 0.5^0 \cdot 0.5^{15} + \binom{15}{1} 0.5^1 \cdot 0.5^{14} +$$
$$+ \binom{15}{2} 0.5^{15} + \binom{15}{3} 0.5^{15} = 0.5^{15} + 15 \cdot 0.5^{15} + 15 \cdot 7 \cdot 0.5^{15} +$$
$$+ 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 0.5^{15} \approx 0.01758$$

$P = 0.01758 < 0.05 = \alpha$, så direktmetoden ger att vi med 5% felrisk kan säga att ytbehandlingen har effekt.

<u>Ex.</u> Vid ett hållfasthetsprov undersöktes 13 stålstavar av varierande tjocklek. Varje stav delades i 2 delar där den ena fick genomgå en härdningsprocedur. Man fick följande värden (högt värde = hög hållfasthet)

Stav nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Behandlad	70	90	54	30	112	49	67	108	109	43	53	66	85
Obehandlad	68	86	47	32	108	53	64	111	102	40	45	64	80

Testa på 5% sign.nivå hypotesen att behandlingen inte påverkar hållfastheten, mot att den påverkas.

<u>Lösn.</u>: Vi har stickprov i par men kan inte göra något normalfördelningsantagande. Istället gör vi ett teckentest.
Vi vill testa

H_0: behandlingen påverkar i genomsnitt inte hållfastheten

mot

H_1: behandlingen påverkar i genomsnitt hållfastheten

Lämplig testvariabel: x = antal par där den behandlade delen har ett lägre värde än den obehandlade = 3

Om H_0 sann så x observation på $X \in Bin(13, 0.5)$

$$\Rightarrow P = P(X \leq 3 \mid X \in Bin(13, 0.5)) = 0.04614$$

$$P = 0.04614 > 0.025 = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow H_0$ kan <u>inte</u> förkastas med 5% felrisk

<u>Anm.</u>: Om H_1: behandlingen <u>ökar</u> i genomsnitt hållfastheten, så kan H_0 förkastas.

Vi avslutar med en rest från tidigare (vecka 2) och ett tips inför returen av inlämning T.

<u>Approximationer</u>: (~4.6)

I många sammanhang (speciellt med binomialfördelningen) är det svårt att beräkna olika sannolikheter exakt.

Några av dessa kan förenklas av att använda följande approximationer:

<u>Sats</u>: (i) Om $X \in Bin(n, p)$ där $n > 10$ och $p < 0.1$, så är X appr. $Po(n \cdot p)$-fördelad.

(ii) Om $X \in Bin(n, p)$ där $np(1-p) > 10$ så är X appr. $N(np, \sqrt{np(1-p)})$-fördelad.

(iii) Om $X \in Po(\lambda)$ där $\lambda > 15$, så är X appr.

$N(\lambda, \sqrt{\lambda})$ - fördelad.

Ex. En firma påstår att felkvoten i ett parti enheter är högst 0.03. En köpare misstänker att felkvoten är större. För att kontrollera detta väljer man slumpmässigt ut 100 enheter och finner att 7 är defekta. Kan köparen, med 5% felrisk, påstå att firman har fel?

Lösn.: Låt p = felkvoten i partiet. Vi vill testa

$$H_0: p = 0.03 \quad \text{mot} \quad H_1: p > 0.03 \quad \text{med } \alpha = 5\%$$

Lämplig testvariabel: x = antal defekta bland 100

Om H_0 sann så x observation på $X \in Bin(100, 0.03)$

$$\Rightarrow P = P(X \geq 7 \mid X \in Bin(100, 0.03)) =$$

$$= 1 - P(X \leq 6 \mid X \in Bin(100, 0.03)) = \ldots \text{ Blä!}$$

Idé: Appendix, sid. 687-691 lista $Bin(n,p) \Rightarrow$

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ Fail! Endast upp till $n = 20$

Ny idé: $n = 100 > 10$, $p = 0.03 < 0.1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow Bin(100, 0.03) \approx Po(100 \cdot 0.03) = Po(3)$$

$$\Rightarrow P \approx 1 - P(X \leq 6 \mid X \in Po(3)) = \{\text{appendix, sid. 691-692}\}$$

$$= 1 - 0.966 = 3.4\%$$

$P = 0.034 < 0.05 = \alpha \Rightarrow H_0$ kan förkastas med 5% felrisk

Ex. "relaterat" till inlämning 1

Ex. Antag att X_1 och X_2 är oberoende observationer från en Exp(λ)-fördelning.

(a) Bestäm $P(\min(X_1, X_2) > x)$

(b) Bestäm täthetsfunktionen till $\min(X_1, X_2)$

Lösn.: $X_i \in \text{Exp}(\lambda) \Rightarrow f_{X_i}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{om } x \geq 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

och $F_{X_i}(x) = P(X_i \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{om } x \geq 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

(a) $P(\min(X_1, X_2) > x) = P(X_1 > x \overset{\cap}{\text{och}} X_2 > x) =$

$= \{\text{ober.}\} = P(X_1 > x) \cdot P(X_2 > x) =$

$= (1 - P(X_1 \leq x))(1 - P(X_2 \leq x)) =$

$= (1 - (1 - e^{-\lambda x}))(1 - (1 - e^{-\lambda x})) =$

$= (e^{-\lambda x})^2 = \underline{\underline{e^{-2\lambda x}}}$ om $x \geq 0$ (0 annars)

(b) $F_{\min(X_1, X_2)}(x) = P(\min(X_1, X_2) \leq x) =$

$= 1 - P(\min(X_1, X_2) > x) \overset{(a)}{=} 1 - e^{-2\lambda x}$ om $x \geq 0$

$\Rightarrow f_{\min}(x) = F'_{\min}(x) = \underline{\underline{2\lambda e^{-2\lambda x}}}$ om $x \geq 0$