MATEMATISK STATISTIK | **Hjälpmedel: Typgodkänd miniräknare**
Göteborgs Universitet | **A4-blad med anteckningar**
Telefonvakt: Filip Wikman | Datum: 2019-08-28 kl. 14.00 - 18.00
Tentamen | Telefon: 5325

MSG810 Matematisk Statistik och Diskret Matematik
GU, läsperiod 2

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: G: 12-21.5 p, VG: 22-30 p.

Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng**. Motivera och förklara så väl du kan.

1. En fysikstudent vill släppa en pappershelikopter från 10 meters höjd. På grund av slumpmässiga variationer blir släpphöjden inte exakt 10 meter, utan kan istället betraktas som en stokastisk variabel Y, som ges av sambandet $Y = 9.75 + 0.5X$, där X är en kontinuerlig stokastisk variabel med den potentiella täthetsfunktionen

$$f(x) = \begin{cases} c(x - x^2) & \text{om } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

(a) Bestäm konstanten c så att $f(x)$ blir en täthetsfunktion. (1 p)

(b) Beräkna väntevärdet och standardavvikelsen till Y. (2 p)

(c) Beräkna sannolikheten att släpphöjden blir mindre än 10.1 meter. (2 p)

2. En brevbärare lägger brev i en postsäck. Antag att ett slumpmässigt utvalt brev väger 25 gram med sannolikhet 0.1, 50 gram med sannolikhet 0.5, 75 gram med sannolikhet 0.3 och 100 gram med sannolikhet 0.1. Om man lägger i mer än 52.5 kg med brev i postsäcken går den sönder.

(a) Låt X vara vikten av ett slumpmässigt valt brev. Beräkna väntevärdet och standardavvikelsen till X. (1.5 p)

(b) Antag att brevbäraren lägger 860 slumpmässigt utvalda brev i säcken. Beräkna approximativt sannolikheten att säcken går sönder. (2.5 p)

3. I en liten ort i delstaten Oklahoma i USA oroar sig invånarna för att deras dricksvatten förstörs av fracking-verksamheten som bedrivs i närheten. De införskaffar därför testutrustning och mäter halten av ett giftämne i 6 stycken av ortens brunnar. Detta ger mätvärdena:

$$0.614 \quad 0.228 \quad 0.742 \quad 0.653 \quad 0.352 \quad 0.673.$$

Mätningarna kan ses som oberoende och normalfördelade, och utrustningen har en angiven osäkerhet på $\sigma = 0.4$. Delstatens riktlinjer anger att en gifthalt som överstiger 0.2 anses som riskabel och bör rapporteras.

(a) Formulera ett lämpligt test med 1% felrisk för att avgöra om resultatet bör rapporteras. (2.5 p)

(b) Genomför testet i (a) med de mätvärden som har insamlats. (0.5 p)

(c) Vad är testets styrka om den sanna gifthalten i grundvattnet är 0.3? (1 p)

Var god vänd!

4. Den stokastiska variabeln (X, Y) har den potentiella, simultana täthetsfunktionen

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{c}{y} e^{-xy^2} & \text{om } x \geq 0,\ y \geq 1, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

(a) Bestäm konstanten c så att f blir en täthetsfunktion. (2 p)

(b) Bestäm den marginella täthetsfunktionen för Y. (1 p)

5. En livsmedelskedja har nyligen genomfört en större förändring av sortimentet. För att testa om denna förändring har inneburit större omsättning i affärerna väljs 8 affärer ut slumpmässigt. Därefter kontrolleras för var och en dels vilken omsättning affären har haft under den senaste veckan, och dels under motsvarande vecka föregående år innan sortimentet förändrades. Man får följande resultat (i tusentals kronor):

Affär	1	2	3	4	5	6	7	8
Före	62	81	47	49	66	31	45	88
Efter	77	59	84	91	65	61	99	91

Kan man med 5% felrisk dra slutsatsen att förändringen har ökat omsättningen? (3 p)

6. En viss typ av kretskort genomgår en kvalitetskontroll innan de går till försäljning, och repareras om de är defekta. Ibland misslyckas reparationen. Dessutom finns det kretskort som inte kontrolleras alls. Man vet att sannolikheten att ett kretskort genomgår en kvalitetskontroll är 0.99, att sannolikheten att ett kretskort som genomgått kvalitetskontroll är defekt är 0.02, och att sannolikheten att ett kretskort som inte genomgått kvalitetskontroll är defekt är 0.12.

Antag att man köper ett kretskort och upptäcker att det defekt. Vad är sannolikheten för att detta kretskort har genomgått kvalitetskontroll? (3 p)

7. Livslängden för en viss sorts elektriska motstånd kan antas vara normalfördelade med väntevärde μ och standardavvikelse $\sigma = 2$ (i enheten år). Man vill testa $H_0 : \mu = 23$ mot $H_1 : \mu = 25$ på signifikansnivån 0.01.

(a) Hur många observationer behövs om man vill att styrkan ska vara minst 0.98? (3.5 p)

(b) Bestäm själva testet. (0.5 p)

8. Beräkna med genererande funktioner på hur många sätt man kan placera 16 chokladbitar i ett paket, om det finns 4 olika sorters choklad och man som mest får lägga 4 bitar av de 3 första chokladsorterna i paketet. (4 p)

Ledning: $\dfrac{1}{(1-x)^{k+1}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{k+n}{k} x^n$

Lycka till!

/Hossein