MSG810, Lösningar tenta 2019-08-28

1 (a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = c\int_0^1 (x-x^2)\,dx = c\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$

$= c\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = c\cdot\frac{1}{6} \overset{\text{vill}}{=} 1 \iff \underline{\underline{c=6}}$

(b) $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^1 6x(x-x^2)\,dx = 6\int_0^1 (x^2-x^3)\,dx =$

$= 6\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 6\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = 6\int_0^1 (x^3-x^4)\,dx = 6\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1 =$

$= 6\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right) = 6\cdot\frac{1}{20} = \frac{3}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{Var}(X) = \frac{3}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{10}-\frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[9.75+0.5X] = 9.75 + 0.5\,\mathbb{E}[X] =$

$= 9.75 + 0.5\cdot 0.5 = \underline{\underline{10}}$

$\sigma^2 = \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(9.75+0.5X) = 0.5^2\,\mathrm{Var}(X) =$

$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{20} = \frac{1}{80} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{1}{80}} = \underline{\underline{\frac{1}{4\sqrt{5}} \approx 0.112}}$

(c) $P(Y<10.1) = P(9.75+0.5X<10.1) =$

$= P(0.5X<0.35) = P\left(X<\frac{0.35}{0.5}\right) = P(X<0.7) =$

$= \int_{-\infty}^{0.7} f(x)\,dx = 6\int_0^{0.7}(x-x^2)\,dx = 6\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^{0.7} =$

$= 3\cdot 0.7^2 - 2\cdot 0.7^3 = \underline{\underline{0.784}}$

2 (a) X = vikt brev har fördelningen

X	25	50	75	100
p_X	0.1	0.5	0.3	0.1

$$\mu = \mathbb{E}[X] = 0.1\cdot 25 + 0.5\cdot 50 + 0.3\cdot 75 + 0.1\cdot 100 = \underline{\underline{60g = 0.060\text{ kg}}}$$

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = 25^2\cdot 0.1 + 50^2\cdot 0.5 + 75^2\cdot 0.3 + 100^2\cdot 0.1 - 60^2 = 400$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{400} = 20g = \underline{\underline{0.020\text{ kg}}}$$

(b) Låt $X_1, \dots, X_{860}$ där X_i = vikt brev nr. $i = 1, \dots, 860$ och studera

$Y = X_1 + \dots + X_{860}$ totala vikten brev

Centrala gränsvärdessatsen:

$$Y \text{ appr. } N(860\cdot 0.06,\ 0.02\sqrt{860}) = N(51.6,\ 0.5865)$$

$$\Rightarrow P(Y > 52.5) = 1 - P\left(\frac{Y - 51.6}{0.5865} \leq \frac{52.5 - 51.6}{0.5865}\right) \approx$$

$$\approx 1 - P(Z \leq 1.53) = 1 - 0.9370 = \underline{\underline{6.3\%}}$$

3. (a) $N(\mu, \sigma)$ med σ känd $\Rightarrow \bar{x}$ lämplig testvariabel

Vi vill testa

$H_0: \mu = 0.2$ mot $H_1: \mu > 0.2$ med $\alpha = 1\%$

Vill hitta $k \in \mathbb{R}$ så att:

Om $\bar{x} \leq k$ så förkasta inte H_0

Om $\bar{x} > k$ så förkasta H_0

Om H_0 sann så $\bar{x}$ observ. på $\bar{X} \in N(0.2, \frac{0.4}{\sqrt{6}})$

$$\Rightarrow 0.01 = P(\bar{X} > k \mid \bar{X} \in N(0.2, \frac{0.4}{\sqrt{6}})) =$$

$$= 1 - P(\bar{X} \leq k) = 1 - P(Z \leq \frac{k - 0.2}{0.4/\sqrt{6}}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(Z \leq \frac{k-0.2}{0.4/\sqrt{6}}) = 0.99 \overset{\text{tabell}}{\Longrightarrow} \frac{k-0.2}{0.4/\sqrt{6}} = 2.33 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = 0.2 + 2.33 \cdot \frac{0.4}{\sqrt{6}} = 0.58049 \approx 0.59$$

<u>Test</u>: Om $\bar{x} \leq 0.59$ så förkasta inte H_0

Om $\bar{x} > 0.59$ så förkasta H_0

(b) $\bar{x} = \frac{3.262}{6} \approx 0.5437 < 0.59 \overset{(a)}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow$ förkasta <u>inte</u> H_0

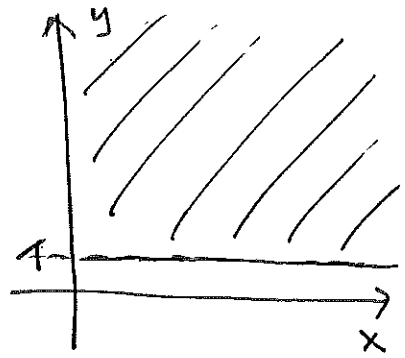
$\therefore$ Kan ej med 1% felrisk slå fast att gifthalten > 0.2

(c) $\text{Styrka}(\mu=0.3) = P\left(\bar{X} > 0.59 \mid \bar{X} \in N\left(0.3, \frac{0.4}{\sqrt{6}}\right)\right) =$

$= 1 - P(\bar{X} \leq 0.59) = 1 - P\left(Z \leq \frac{0.59-0.3}{0.4/\sqrt{6}}\right) \approx$

$\approx 1 - P(Z \leq 1.78) = 1 - 0.9625 = \underline{\underline{3.75\ \%}}$

4 (a) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dA =$



$= c\int_1^{\infty}\left(\int_0^{\infty} \frac{1}{y} e^{-xy^2}\,dx\right)dy =$

$= c\int_1^{\infty} \frac{1}{y}\left[\frac{e^{-xy^2}}{-y^2}\right]_0^{\infty} dy = c\int_1^{\infty}\frac{1}{y^3}\,dy = c\int_1^{\infty} y^{-3}\,dy =$

$= c\left[\frac{y^{-2}}{-2}\right]_1^{\infty} = \frac{c}{2} \overset{\text{vill}}{=} 1 \iff \underline{\underline{c=2}}$

(b) $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^{\infty}\frac{2}{y}e^{-xy^2}\,dx =$

$= \frac{2}{y}\left[\frac{e^{-xy^2}}{-y^2}\right]_0^{\infty} = \underline{\underline{\frac{2}{y^3}}}$ om $y \geq 1$. 0 annars

5. Teckentest. Vi vill testa:

H_0: omsättningen har inte förändrats

mot

H_1: omsättningen har ökat

med $\alpha = 5\%$

Låt x = antal affärer där omsättningen har minskat $= 2$

Om H_0 sann så x observ. på $X \in Bin(8, 0.5)$

$$\Rightarrow P = P(X \leq 2 \mid X \in Bin(8, 0.5)) =$$

$$= \binom{8}{0} 0.5^8 + \binom{8}{1} 0.5^8 + \binom{8}{2} 0.5^8 =$$

$$= 9 \cdot 0.5^8 + 28 \cdot 0.5^8 = 37 \cdot 0.5^8 = 0.1445$$

$P = 0.1445 > 0.05 = \alpha \Rightarrow$ förkasta inte H_0!

$\therefore$ Vi kan inte med 5% felrisk anta att omsättningen har ökat.

6. Låt K = kretskort genomgått kvalitetskontroll
D = kretskort är defekt

Vet att: $P(K) = 0.99$, $P(D|K) = 0.02$, $P(D|K^c) = 0.12$

Sökt: $P(K|D)$

$$P(D) = 0.99 \cdot 0.02 + 0.01 \cdot 0.12 = 0.021$$

$$P(K|D) = \frac{P(K \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|K) \cdot P(K)}{P(D)} =$$

$$= \frac{0.02 \cdot 0.99}{0.021} = 0.942857 \approx \underline{\underline{94.3\%}}$$

7. (a) $N(\mu, \sigma)$ med σ känd $\Rightarrow$ $\bar{x}$ lämplig testvariabel

Vill testa: $H_0: \mu = 23$ mot $H_1: \mu = 25$ med $\alpha = 1\%$

Vill hitta $k \in \mathbb{R}$ så att:

Om $\bar{x} \leq k$ så förkasta inte H_0

Om $\bar{x} > k$ så förkasta H_0

Om H_0 sann så $\bar{x}$ observ. på $\bar{X} \in N(23, \frac{2}{\sqrt{n}})$

Om H_1 sann så $\bar{x}$ observ. på $\bar{X} \in N(25, \frac{2}{\sqrt{n}})$

$$\alpha = P(\text{förkasta } H_0 \mid H_0 \text{ sann})$$

$$\Leftrightarrow$$

$$0.01 = P(\bar{X} > k \mid \bar{X} \in N(23, \tfrac{2}{\sqrt{n}})) =$$

$$= 1 - P(\bar{X} \leq k) = 1 - P(Z \leq \frac{k-23}{2/\sqrt{n}}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(Z \leq \frac{k-23}{2/\sqrt{n}}) = 0.99 \overset{\text{tabell}}{\Rightarrow} \frac{k-23}{2/\sqrt{n}} = 2.33 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = 23 + 2.33 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}}$$

$$\text{Styrka} = P(\text{förkasta } H_0 \mid H_1 \text{ sann})$$

$$\Leftrightarrow$$

$$0.98 = P(\bar{X} > k \mid \bar{X} \in N(25, \tfrac{2}{\sqrt{n}})) =$$

$$= 1 - P(\bar{X} \leq k) = 1 - P(Z \leq \frac{k-25}{2/\sqrt{n}}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(Z \leq \frac{k-25}{2/\sqrt{n}}) = 0.02 \overset{\text{tabell}}{\Rightarrow} \frac{k-25}{2/\sqrt{n}} = -2.05 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \quad k = 25 - 2.05 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}}$

Vi får ekv.systemet $\begin{cases} k = 23 + 2.33 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \\ k = 25 - 2.05 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 23 + 2.33 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} = 25 - 2.05 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow 4.38 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{n} = 4.38 \Rightarrow n = 4.38^2 = 19.1844 \approx 20$

$\therefore$ $n = 20$ mätningar

(b) $k \overset{(a)}{=} 23 + 2.33 \cdot \frac{2}{\sqrt{19.1844}} \simeq 24.1$

Test: Om $\bar{x} \leq 24.1$ så förkasta inte H_0

Om $\bar{x} > 24.1$ så förkasta H_0

8. Vill bestämma antalet heltalslösningar till

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 16$$

då $0 \leq y_1, y_2, y_3 \leq 4$ och $y_4 \geq 0$.

Den genererande funktionen ges av:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^3 \cdot (1 + x + x^2 + \dots) = \left(\frac{1-x^5}{1-x}\right)^3 \cdot \frac{1}{1-x} =$$

$$= (1-x^5)^3 \cdot \frac{1}{(1-x)^4} = \{\text{ledning}\} = (1-x^5)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{3+n}{3} x^n =$$

$$= (1 - 3x^5 + 3x^{10} - x^{15}) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{3+n}{3} x^n$$

Koefficienten framför x^{16} ges av:

$$\binom{3+16}{3} - 3\binom{3+11}{3} + 3\binom{3+6}{3} - \binom{3+1}{3} =$$

$$= \frac{19 \cdot 18 \cdot 17}{3 \cdot 2} - \frac{3 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{3 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} - 4 =$$

$$= 3 \cdot 17 \cdot 19 - 6 \cdot 13 \cdot 14 + 4 \cdot 7 \cdot 9 - 4 = 125$$

$\therefore$ 125 olika sätt