Mat. stat., GU-fysik, ht 2018, Övning 5.2

Ex. Ljusblixtar som levereras till ett labb uppges ha sann. $p = 0.02$ att inte fungera. För att testa detta mot alternativet att felsannolikheten är större provar man 60 blixtar. Om antalet felaktiga är 4 eller fler så förkastas nollhypotesen att sann. för fel är $p = 0.02$.

(a) Bestäm testets signifikansnivå

(b) Bestäm testets styrka i $p = 0.1$

Lösn.: Vill testa $H_0 : p = 0.02$ mot $H_1 : p > 0.02$ då $n = 60$

Låt $X$ = antal felaktiga blixtar

Om $H_0$ sann så $X \in Bin(60, 0.02)$

(a) $\alpha = P(\text{förkasta } H_0 \mid H_0 \text{ sann}) =$

$$= P(X \geq 4 \mid X \in Bin(60, 0.02)) = 1 - P(X \leq 3) =$$

$$= \{n = 60 > 10,\ p = 0.02 < 0.1 \Rightarrow X \text{ appr. } Po(1.2)\} =$$

$$= 1 - \left(\frac{e^{-1.2} \cdot 1.2^0}{0!} + \frac{e^{-1.2} \cdot 1.2^1}{1!} + \frac{e^{-1.2}\, 1.2^2}{2!} + \frac{e^{-1.2}\, 1.2^3}{3!}\right) =$$

$$= 1 - e^{-1.2}\left(1 + 1.2 + \frac{1}{2} \cdot 1.2^2 + \frac{1}{6} \cdot 1.2^3\right) \approx$$

$$\approx 1 - 0.966 = 0.034 = \underline{\underline{3.4\%}}$$

(b) Vill testa styrkan då $H_1 : p = 0.1$ dvs beräkna

$P(\text{förkasta } H_0 \mid H_1 \text{ sann}) =$

$= P(X \geq 4 \mid X \in Bin(60, 0.1)) =$

$= 1 - P(X \leq 3) = \{X \text{ appr. } Po(6) + \text{appendix}\} =$

$= 1 - 0.151 = 0.849 \approx \underline{\underline{85\%}}$

<u>Ex</u>. I december 1977 annonserade Findus på följande sätt: "Findus lagar fortfarande Sveriges populäraste köttbullar (näst efter hemlagade förstås)." Uttalandet baserade Findus på följande jämförande undersökning: 200 konsumenter fick jämföra Findus köttbullar med Felix köttbullar, och man fann att 120 av 200 tyckte att Findus smakade bäst. Kan Findus försvara sitt påstående? Besvara frågan med ett lämpligt test på 1% sign.nivå.

<u>Lösn.</u>: Vill testa, $H_0$: Findus/Felix samma skit mot $H_1$: Konsumenterna föredrar Findus, med $\alpha = 1\%$

Låt $X$ = antal konsum. som föredrar Findus

Om $H_0$ sann så $X \in Bin(200, 0.5)$

$\Rightarrow P(X \geq 120) = 1 - P(X \leq 119) =$

$= \{np(1-p) = 200 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 50 > 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow X$ appr. $N(np, \sqrt{np(1-p)}) = N(100, \sqrt{50})$ $\} \approx$

$$\approx 1 - P\left(\frac{X-100}{\sqrt{50}} \leq \frac{119-100}{\sqrt{50}}\right) \approx 1 - P(Z \leq 2.69) =$$

$= \{\text{appendix}\} = 1 - 0.9964 = 0.0036$

Direktmetoden: $P = 0.0036 < 0.01$ så Findus kan med 99% säkerhet påstå att de har mindre äckliga köttbullar

<u>Ex.</u> I ett projekt studeras underbenssvullnaden hos personer med stillasittande arbete. Man har konstruerat en apparat för noggrann mätning av underbenens volym. Med denna mäter man volymsökningen under dagen av underbenen hos 6 personer dels under normala arbetsdagar, dels under dagar då personerna fick röra sig var 15:e minut, s.k. omväxlingsdagar. Man fick följande värden på volymsökningen (i %)

| Försöksperson | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Normaldag | 3.7 | 4.1 | 5.5 | 3.9 | 3.4 | 5.3 |
| Omväxlingsdag | 2.0 | 2.1 | 2.7 | 1.8 | 2.9 | 2.6 |

Testa på lämpligt vis, på 1% sign.nivå, om det är någon skillnad på volymsökningen mellan normal- och omväxlingsdagar, om:

(a) observationsvärdena kan antas vara normal-fördelade

(b) observationsvärdena inte kan antas vara normal-fördelade.

Lösn.: (a) Låt $X_1, \dots, X_6 \in N(\mu_i, \sigma)$ (stickprov i par) beteckna normaldagarna med motsv. mätvärden $x_1, \dots, x_6$ och $Y_1, \dots, Y_6 \in N(\mu_i + \Delta, \sigma)$ omväxlingsdagarna med motsv. mätvärden $y_1, \dots, y_6$

Bilda $D_i = Y_i - X_i \in N(\Delta, \sigma)$ och $d_i = y_i - x_i$.
Vi får

| Person | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $d_i$ | -1.7 | -2.0 | -2.8 | -2.1 | -0.5 | -2.7 |

$$\Rightarrow \bar{d} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} d_i = -\frac{11.8}{6} \approx -1.9667$$

$$s^2 = \frac{1}{5}\left(\sum_{i=1}^{6} d_i^2 - 6\cdot\bar{d}^2\right) = \frac{1}{5}\left(26.68 - 6\cdot 1.9667^2\right) \approx 0.6947$$

$$\Rightarrow s = \sqrt{0.6947} \approx 0.8335$$

$$\text{K.I.}: \bar{d} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} = \left\{\begin{array}{l} n = 6,\ \alpha = 0.01 \Rightarrow \\ \Rightarrow t_{0.005}(5) = 4.032 \end{array}\right\} =$$

$$= -1.9667 \pm 4.032\cdot\frac{0.8335}{\sqrt{6}} = -1.9667 \pm 1.3719$$

Intervallet innehåller inte 0!

∴ Ja! Man kan med 1% felrisk påstå att det är skillnad mellan normal- och omväxlingsdagar.

(b) Teckentest. Vi vill testa

Borde stå: Mindre svullnad

$H_0$: Ingen skillnad mot $H_1$: Skillnad med $\alpha = 1\%$

Låt $X$ = antal personer med mer svullnad under omväxlingsdagar

Om $H_0$ sann så $X \in Bin(6, 0.5)$

$$\Rightarrow P = P(X = 0 \mid X \in Bin(6, 0.5)) =$$

$$= \binom{6}{0} 0.5^0 \cdot 0.5^6 = 0.5^6 = 0.015625$$

Direktmetoden: $P = 0.015625 > 0.005 = \frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow$ Nej! $H_0$ kan inte förkastas (även om vi jämför mot $\alpha = 0.01$)