

MSG810 Matematisk Statistik och Diskret Matematik

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: G: 12-21.5 p, VG: 22-30 p.

Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng.** Motivera och förklara så väl du kan.

1. Vid en statistisk mottagningskontroll av en sändning av 100 ohms motstånd väljer man slumpmässigt ut 5 motstånd utan återläggning ur askar med 40 motstånd. Om man finner mer än 2 felmärkta motstånd i urvalet från en ask skickas asken tillbaka. Om man finner 1 eller 2 felmärkta motstånd i urvalet så gör man en så kallad allkontroll, dvs undersöker alla motstånd i asken, och reducerar därefter priset på asken. Om man inte finner något felmärkt motstånd i urvalet så accepteras asken. Antag nu att en ask innehåller 6 felmärkta motstånd.

- (a) Ange den klassiska sannolikhetsdefinitionen. (1 p)
- (b) Vad är sannolikheten för att asken ska accepteras? (1 p)
- (c) Vad är sannolikheten för att asken ska allkontrolleras? (1 p)
- (d) Vad är sannolikheten för att asken ska skickas tillbaka? (1 p)

2. Antag att X är en kontinuerlig stokastisk variabel med den potentiella täthetsfunktionen

$$f(x) = \begin{cases} c(x^2 - x^3) & \text{om } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

- (a) Bestäm konstanten c så att f blir en täthetsfunktion. (1 p)
- (b) Beräkna väntevärdet och standardavvikelsen till X . (2 p)
- (c) Beräkna den betingade sannolikheten (2 p)

$$P(0.5 \leq X \leq 0.8 \mid 0.4 \leq X \leq 0.7).$$

3. Givet är fem oberoende mätningar

$$1.87 \quad 3.64 \quad -0.20 \quad 3.79 \quad 0.23$$

av en $N(\mu, \sigma)$ -fördelad stokastisk variabel. Bestäm ett (symmetriskt) 95% konfidensintervall (avrundat till 2 decimaler) för:

- (a) väntevärdet μ då $\sigma = 2$. (1 p)
- (b) väntevärdet μ då σ okänd. (1 p)
- (c) Bestäm ett 99% konfidensintervall (avrundat till 2 decimaler) för variansen. (1 p)

Var god vänd!

4. Innan starten på seglartävlingen *The Boat Race* singlar en slant för att avgöra vem som får välja sida att starta på. Det är då mycket viktigt att slanten är symmetrisk. För att testa detta singlar slanten 136 gånger, med resultaten:

Krona (H)	Klave (T)	Totalt
57	79	136

Är slanten symmetrisk? Besvara frågan med att genomföra ett lämpligt test på 5% signifikansnivå. (3 p)

5. Låt X_1 vara värdet för en aktie i företag A vid en viss tidpunkt, och låt X_2 vara värdet för en aktie i företag B vid samma tidpunkt. Antag att X_1 och X_2 är oberoende och normalfördelade stokastiska variabler, båda med väntevärdet 100 kr och standardavvikelsen 10 kr. Kickan har en aktieportfölj som består av 100 aktier i företag A, medan Pelle har en aktieportfölj som består av 50 aktier i företag A och 50 aktier i företag B. Låt Y_1 och Y_2 beteckna värdet av Kickans respektive Pelles aktieportföljer. Beräkna:

(a) Beräkna $P(Y_1 \geq 12000)$. (1 p)

(b) Beräkna $P(Y_2 \geq 12000)$. (1.5 p)

(c) Beräkna sannolikheten att Kickans portfölj är värd mer än 1000 kr mer än Pelles portfölj. (1.5 p)

6. Tvättmaskiner av märket *Elektrofusk* har exponentialfördelad livslängd med väntevärde 2 år. Om maskinen går sönder måste den lagas. Sker detta inom ett år så gäller garantin och den repareras gratis. Om den går sönder efter 5 år (eller senare) så kostar reparationen 4000 kr. Däremellan kostar reparationen 2000 kr. Vad är den förväntade reparationskostnaden för dessa tvättmaskiner? (3 p)

7. Använd genererande funktioner till att lösa rekursionsekvationen (4 p)

$$\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + 2, \quad \text{om } n \geq 1 \end{cases}$$

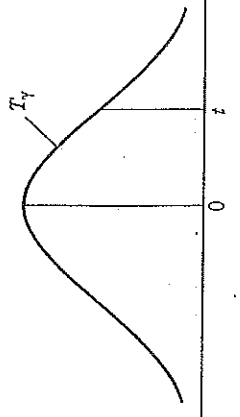
8. Antag att det för en viss sorts laptop kan finnas 3 olika slags fel: (A) chassit är trasigt, (B) wifi-anslutningen fungerar inte, och (C) touchpaden är trasig. Det gäller att A och C är oberoende av varandra. Därtill vet man att $P(A) = 0.01$, $P(B) = 0.01$, $P(C) = 0.02$, $P(A \cap B) = 0.003$ och $P(B \cap C) = 0.003$. Slutligen gäller även att de tre felen aldrig kan inträffa samtidigt.

Antag nu att man väljer ut en sådan laptop slumpmässigt. Låt X vara antalet fel som finns på denna laptop. Beräkna sannolikhetsfördelningen till X . (4 p)

Lycka till!

/Hossein

T distribution



Column heading = cumulative probability
 Row heading = degrees of freedom
 Row α = standard normal values

γ	.6	.75	.9	.95	.975	.99	.995	.999	.9995
1	0.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.317	636.607
2	0.289	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.598
3	0.271	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	0.257	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.250	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.245	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.242	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.240	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.238	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.237	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.236	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.235	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.235	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.234	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.234	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.233	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.232	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.232	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.611	3.922
19	0.232	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.231	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.231	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.230	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.230	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	0.230	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.229	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.229	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.229	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.229	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.228	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.228	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
31	0.228	0.682	1.309	1.696	2.040	2.453	2.744	3.375	3.633
32	0.228	0.682	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365	3.622
33	0.228	0.682	1.308	1.692	2.035	2.445	2.733	3.356	3.611
34	0.228	0.682	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348	3.601
35	0.228	0.682	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340	3.591
36	0.228	0.681	1.305	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333	3.582
37	0.228	0.681	1.305	1.687	2.026	2.431	2.715	3.326	3.574
38	0.228	0.681	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319	3.566
39	0.228	0.681	1.304	1.685	2.023	2.426	2.708	3.313	3.558
40	0.228	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
41	0.228	0.681	1.303	1.683	2.020	2.421	2.701	3.301	3.544
42	0.228	0.681	1.302	1.683	2.020	2.418	2.698	3.296	3.538
43	0.228	0.680	1.302	1.681	2.017	2.416	2.695	3.291	3.532
44	0.228	0.680	1.301	1.680	2.015	2.414	2.692	3.286	3.526

TABLE VI
T distribution (concluded)

γ	.6	.75	.9	.95	.975	.99	.995	.999	.9995
45	0.255	0.680	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.281	3.520
46	0.255	0.680	1.300	1.679	2.013	2.410	2.687	3.277	3.515
47	0.255	0.680	1.300	1.678	2.012	2.408	2.685	3.273	3.510
48	0.255	0.680	1.299	1.677	2.011	2.407	2.682	3.269	3.505
49	0.255	0.680	1.299	1.677	2.010	2.405	2.680	3.265	3.500
50	0.255	0.679	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261	3.496
51	0.255	0.679	1.298	1.675	2.008	2.402	2.676	3.258	3.492
52	0.255	0.679	1.298	1.675	2.007	2.400	2.674	3.255	3.488
53	0.255	0.679	1.298	1.674	2.006	2.399	2.672	3.251	3.484
54	0.255	0.679	1.297	1.674	2.005	2.397	2.670	3.248	3.480
55	0.255	0.679	1.297	1.673	2.004	2.396	2.668	3.245	3.476
56	0.255	0.679	1.297	1.673	2.003	2.395	2.667	3.242	3.473
57	0.255	0.679	1.297	1.672	2.002	2.394	2.665	3.239	3.470
58	0.255	0.679	1.296	1.672	2.002	2.392	2.663	3.237	3.466
59	0.254	0.679	1.296	1.671	2.001	2.391	2.662	3.234	3.463
60	0.254	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
61	0.254	0.679	1.295	1.670	2.000	2.389	2.659	3.229	3.457
62	0.254	0.678	1.295	1.670	1.999	2.388	2.658	3.227	3.455
63	0.254	0.678	1.295	1.669	1.998	2.387	2.656	3.225	3.452
64	0.254	0.678	1.295	1.669	1.998	2.386	2.655	3.223	3.449
65	0.254	0.678	1.295	1.669	1.997	2.385	2.654	3.221	3.447
66	0.254	0.678	1.295	1.668	1.997	2.384	2.652	3.218	3.444
67	0.254	0.678	1.294	1.668	1.996	2.383	2.651	3.217	3.442
68	0.254	0.678	1.294	1.668	1.995	2.382	2.650	3.215	3.440
69	0.254	0.678	1.294	1.667	1.995	2.382	2.649	3.213	3.437
70	0.254	0.678	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211	3.435
71	0.254	0.678	1.294	1.667	1.994	2.380	2.647	3.209	3.433
72	0.254	0.678	1.293	1.666	1.993	2.379	2.646	3.207	3.431
73	0.254	0.678	1.293	1.666	1.993	2.378	2.645	3.206	3.429
74	0.254	0.678	1.293	1.666	1.993	2.378	2.644	3.204	3.427
75	0.254	0.678	1.293	1.665	1.992	2.377	2.643	3.203	3.425
76	0.254	0.678	1.293	1.665	1.992	2.376	2.642	3.201	3.423
77	0.254	0.678	1.293	1.665	1.991	2.376	2.641	3.200	3.422
78	0.254	0.678	1.292	1.665	1.991	2.375	2.640	3.198	3.420
79	0.254	0.678	1.292	1.664	1.990	2.375	2.640	3.197	3.418
80	0.254	0.678	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
81	0.254	0.678	1.292	1.664	1.990	2.373	2.638	3.194	3.415
82	0.254	0.677	1.292	1.664	1.989	2.373	2.637	3.193	3.413
83	0.254	0.677	1.292	1.663	1.989	2.372	2.636	3.191	3.412
84	0.254	0.677	1.292	1.663	1.989	2.372	2.636	3.190	3.410
85	0.254	0.677	1.292	1.663	1.988	2.371	2.635	3.189	3.409
86	0.254	0.677	1.291	1.663	1.988	2.371	2.634	3.188	3.407
87	0.254	0.677	1.291	1.663	1.988	2.370	2.634	3.187	3.406
88	0.254	0.677	1.291	1.662	1.987	2.369	2.633	3.186	3.405
89	0.254	0.677	1.291	1.662	1.987	2.369	2.632	3.184	3.403
90	0.254	0.677	1.291	1.662	1.987	2.369	2.632	3.183	3.402
91	0.254	0.677	1.291	1.662	1.986	2.368	2.631	3.182	3.401
92	0.254	0.677	1.291	1.662	1.986	2.368	2.630	3.181	3.400
93	0.254	0.677	1.291	1.661	1.986	2.367	2.630	3.180	3.398
94	0.254	0.677	1.291	1.661	1.986	2.367	2.629	3.179	3.397
95	0.254	0.677	1.291	1.661	1.985	2.366	2.629	3.178	3.396
96	0.254	0.677	1.290	1.661	1.985	2.366	2.628	3.177	3.395
97	0.254	0.677	1.290	1.661	1.985	2.365	2.627	3.176	3.394
98	0.254	0.677	1.290	1.661	1.984	2.365	2.627	3.176	3.393
99	0.254	0.677	1.290	1.660	1.984	2.365	2.626	3.175	3.392
100	0.254	0.677	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.391
∞	0.253	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

χ^2 -fördelningen

Tabellen ger det x -värde för vilket $P(\xi > x) = \alpha$ där $\xi \sim \chi^2(f)$.

f	α									
	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.00004	0.00016	0.00098	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
35	17.192	18.509	20.569	22.465	24.797	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169