Lösningar till Tentafrågor

1. I en stor studie skattade man nedre och övre kvartilen till 100 resp 140. Hur många kan man därmed anse har värden över 140?

   Övre kvartilen är 75% percentil, vilket betyder 75% under och alltså 25%över.

2. Om två händelser A och B vet vi att A sker med 32% sannolikhet och B med 15% sannolikhet. Man vet också att båda sker samtidigt med sannolikheten 10%. Undersök om A och B är oberoende händelser.

   För oberoende händelser gäller

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$P(A)P(B) = 0.32 \cdot 0.15 = 0.048 < 0.1 = P(AB)$$

   Alltså ej oberoende.

3. Längden på ett treårigt barn kan anses vara normalfördelat med medelvärdet 97 cm och standardavvikelsen 4 cm.

   (a) Lilla Lisa är 2.5 standardavvikelser under medel. Hur lång är hon?
   Lisa är $97 - 2,5 \cdot 4 = 87$ cm lång

   (b) Hennes dagiskompis Kalle är 103 cm. Ange hans längd som en Z-score.
   Uttryckt som Z-score är Kalle

$$\frac{103 - 97}{4} = 1.5$$

   dvs 1.5 standardavvikelser över medel

4. I ett minnestest på råttor ska varje råtta välja en av två vägar. Om råttan inte minns kan man utgå från att den väljer väg slumpmässigt dvs med sannolikhet $p = 1/2$, medan om den minns bör välja ”rätt” väg. Man avser alltså testa

$$H_0 : p = 1/2$$

   mot

$$H_1 : p > 1/2$$

   Då forskarna är ganska säkra på att råttorna minns väljer de att bara utföra ett experiment med 5 försök och som teststatistika använda

$$S = \text{antalet rätt vägval}$$

   (a) Vilken sannolikhetsfördelning har S?
   Binomialfördelningen: bin(5,p), p=sannolikheten att välja rätt väg

   (b) Vad blir p-värdet för testet om alla 5 försöken lyckas (dvs råttorna väljer rätt väg)?
   Vi har ett enkelsidigt test så

$$\text{p-värde} = P(S \geq 5) = 0.5^5 = 0.03125$$

5. I en studie av behandlingseffekt av SSRI-preparat mot depression hade man en behandlingsgrupp och en placebogrupp. Depressionen mättes med en 5-gradig skala. Efter behandlingen beräknade man vilka som förbättrats resepektive försämrats. De som var kvar på samma depressionsnivå togs bort. För att sedan testa om behandlingen hade effekt gjorde man ett chi2-test. Kan vi säga att behandlingen hade bättre effekt än placebo? Motivera ditt svar.

Behandling * Utfall Crosstabulation

Count

		Utfall		
		SÄMRE	BÄTTRE	Total
Behandling	Placebo	14	107	121
	SSRI	15	288	303
Total		29	395	424

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	5,947[a]	1	,015		
Continuity Correction[b]	4,953	1	,026		
Likelihood Ratio	5,433	1	,020		
Fisher's Exact Test				,019	,016
Linear-by-Linear Association	5,933	1	,015		
N of Valid Cases	424				

a. 0 cells (0,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 8,28.

b. Computed only for a 2x2 table

Av testet framgår att utfallet var signifikant beroende av behandlingen ($p=0.015<0.05$) och av tabellen ser vi att $288/303 \approx 0.95$ är större än $107/121 \approx 0.88$

6. Ett 95% konfidensintervall för vikten på 938 stycken mönstrande 18-åriga pojkar beräknades till $(73.2, 74.6)$ kg. Fem år tidigare hade medelvärdet varit 72 kg. Man beslöt sig för att testa om den nya kullen var signifikant tyngre med signifikansnivå $\alpha = 0.05$. Kan vi anse att det är statistiskt bevisat att det nya populationsmedelvärdet har ökat?

   Ja det kan vi. Vi antar att 72 är ett populationsmedelvärde, dvs ingen osäkerhet. Om nollhypotesen är sann (ingen förändring), så borde konfidensintervallet täcka 72. Det gör det inte, utan hela intervallet ligger ovanför. Därför är det signifikant på nivå 0.05.

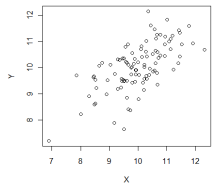
7. I en studie av fyra grupper möss (en kontroll grupp och tre behandlingsgrupper A,B och C) inledde man med att testa om det fanns några skillnader mellan grupperna. Detta test gav ett p-värde på 0.003.

   (a) Vad kallas testet?
   ANOVA (F-test)

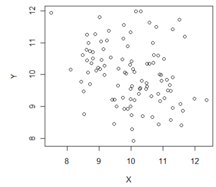
   (b) Kan vi anse att det finns skillnad mellan grupperna? Motivera.
   Ja, om vi anser att 0.05 är rimlig signifiaknsnivå. Vårt p-värde är betydligt mindre.

   (c) Kan vi anse att det finns en säker skillnad mellan kontrollgruppen och grupp C? Motivera
   Nej. det kan vi inte. P-värdet säger bara att det finns några skillnader. Vi måste fortsätta med t ex Tukey.

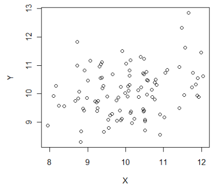
8. De tre diagrammen nedan illustrerar korrelationerna -0.3, 0.5 och 0.7. Para ihop diagrammen med korrelationerna



(a)



(b)



(c)

Figur 1: Tre diagram med olika korrelation

a måste vara 0.7. Tydlig lutning och positiv riktning. De båda andra är mer brusiga, men man anar ändå att b är negativ (-0.3) och c positiv (0.5).

9. En studie av 25 friska individer angav medelvärdet av en biomarkör till 750 ± 10 ng/L. I texten förklardes att 10 syftade på standardfelet (SEM). Då läsaren gärna ville veta vad standardavvikelsen (s) var räknade hon själv ut den. Vad kom hon fram till?

$$s = \text{SEM}\sqrt{n} = 10 \cdot \sqrt{25} = 50$$

10. En diskret stokastisk variabel X kan vara 0, 1 eller 3 med motsvarande sannolikheter $p_0 = 0.5, p_1 = 0.25$ och $p_3 = 0.25$. Beräkna väntevärdet av X.

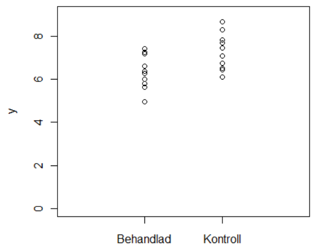
$$E[X] = 0.5 \cdot 0 + 0.25 \cdot 1 + 0.25 \cdot 3 = 1$$

11. Lisa har angett ett 95% konfidensintervall som är (132,144)

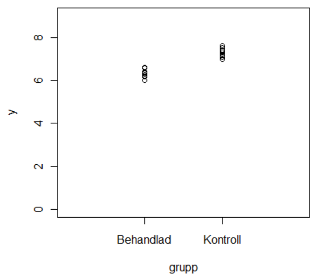
   (a) Vad är skattningen av medelvärdet?
   Medelvärdet ligger mitt i intervallet. (132+144)/2= 138

   (b) Hennes medarbetare Tore som är en försiktig general tycker att hon borde ange ett 99%igt konfidensintervall istället. Blir det bredare eller smalare?
   Ett 99%igt intervall är bredare. Intuitivt måste det vara större om man ska vara mera säker. Man inser det också om man jämför kvantilerna. ($t_{0.005} > t_{0.025}$)

12. Två olika laboratorier a och b utförde samma experiment för att studera effekterna på en variabel y av en viss behandling. Man hade 10 möss i kontrollgruppen och 10 möss i behandlingsgruppen. Efter avslutat försök mättes y och i båda labben fick man medelvärden 6.3 respektive 7.3. Resultaten illustreras i figur 2. Båda utförde också samma statistiska test. Det ena labbet fick p-värdet 0.02 vid test av om det var någon skillnad mellan grupperna, medan det andra fick imponerande $p = 9 \cdot 10^{-7}$.



(a)



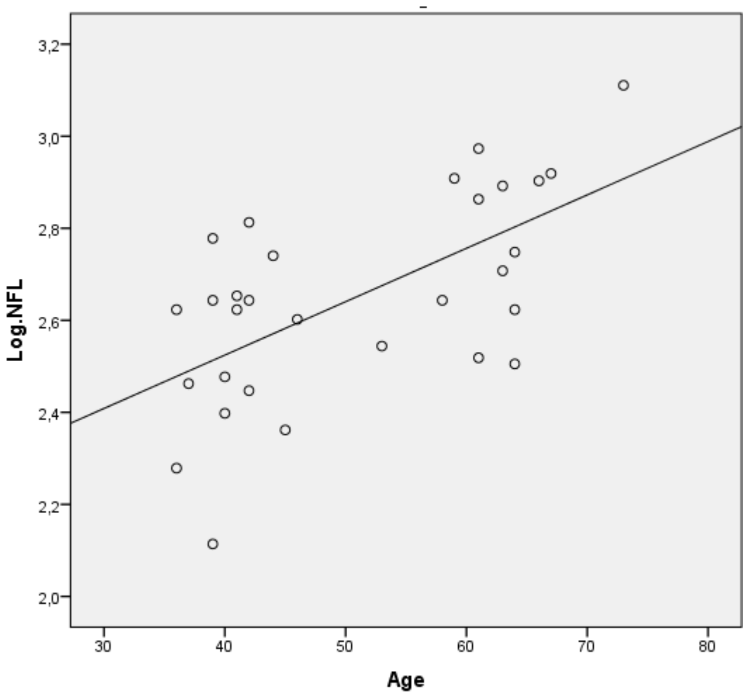
(b)

Figur 2: Behandling vs kontroll i två lab

(a) Vilket statistiskt test utfördes?
Ett tvåstickprovs ttest

(b) Vilket lab fick p-värdet 0.02? Motivera ditt svar!
Lab (b) måste ha fått det lägre p-värdet för där är spridningen betydligt mindre än i lab (a)

13. Nedan visas i ett punktdiagram sambandet mellan ålder och NFL. NFL har en ganska skev fördelning därför har värdena transformerats till Log(NFL). Därefter visas utdata från en statistisk analys som försöker fastställa om det är ett signifikant samband.



Coefficients

Model		Unstandardized Coefficients B	Unstandardized Coefficients Std. Error	Standardized Coefficients Beta	t	Sig.	95,0% Confidence Interval for B Lower Bound	95,0% Confidence Interval for B Upper Bound
1	(Constant)	2,061	,145		14,214	,000	1,764	2,358
	Age	,012	,003	,619	4,175	,000262	,006	,017

(a) Vad kallas den statistiska analysen som använts?
Regressionsanalys

(b) Kan vi förkasta att lutningen är 0?
Ja, pvärdet är $0.000262 < 0.05$

(c) Vilket NFL-värde förväntar vi oss att en 50-åring har?

$$log(NFL) = 2.081 + 0.012 \cdot 50 = 2.681$$

$$NFL = 10^2.681$$

14. Ett 95% konfidensintervall för vikten på 938 stycken mönstrande 18-åriga pojkar beräknades till $(73.2, 74.6)$ kg. Två år tidigare hade populationsmedelvärdet medelvärdet varit 73.5 kg.

(a) Vad var medelvärdet nu?
Medelvärdet är mitt i intervallet. Alltså $\bar{x}$=(73.2+76.6)/2=73.9 kg

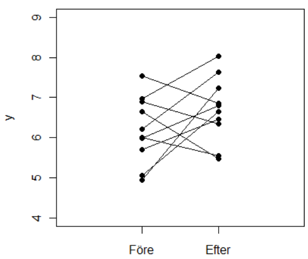
(b) Kan vi anse att det har skett en signifikant ökning av populationsmedelvärdet?
Eftersom 73.5 finns i intervallet (73.3,74.6) kan vi inte förkasta att $\mu = 73.5$ på signifikansnivå 0.05

15. I en stor studie skattade man nedre och övre kvartilen till 100 resp 140. Medianen skattades till 130.

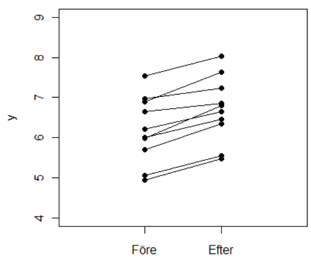
    (a) Hur stor andel av populationen har värden under 100?
    25% (Att nedre kvartilen är 100 betyder just att 25% har lägre värden)

    (b) Hur stor andel av populationen har värden mellan 130 och 140?
    25% (50% är under medianen 130 och 75% är under övre kvartilen140. Denna skillnad är 25%)

16. Bilderna visar exempel på två olika situationer där man t ex testar en behandlingseffekt. I båda undersökningarna har medelvärden höjts från 6.2 till 6.7.



(a)

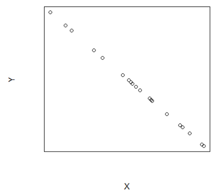


(b)

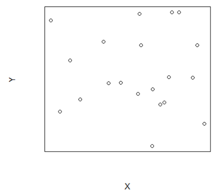
    (a) Vilket test bör vi använda för att undersöka om behandlingen har haft en statistiskt signifikant effekt.
    Eftersom vi har mätningar både före och efter på samma individer har vi parade data och då gör vi ett parat t-test.

    (b) För vilken av de två undersökningarna fick man klart lägst p-värde? Motivera
    Undersökningen i (b) har klart lägst p-värde. Medelvärdet av skillnaderna är densamma, men standardavvikelsen av skillnaderna är betydligt lägre i (b) än i (a).

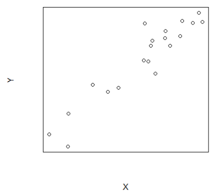
17. (a) Rita tre diagram som illusterar korrelationerna $r = -1, r = 0$ och $r = 0.9$
Figurerna visas nedan



(c) r=-1 (på en negativt lutande linje)



(d) r=0 (huller om buller)



(e) r=0.9 (starkt positivt samband)

(b) I en undersökning där man funnit följande resultat $r = 0.3, p = 0.11$ för sambandet mellan två variabler föreslog professorn att hans elever skulle pröva att göra regressionsanalys istället för att kunna få ett lägre p-värde. Vad anser du om det förslaget? Motivera.
Det var meningslöst. Professorn hade nog glömt att korrelationsanalys och regressionsanalys ger exakt samma p-värden.

18. Längden på ett treårigt barn kan anses vara normalfördelat med medelvärdet 97 cm och standardavvikelsen 4 cm.

(a) Lilla Åsa är 1.5 standardavvikelser under medel. Hur lång är hon?
Hon är 91 cm. $(97 - 4 \cdot 1.5) = 91$

(b) Hennes dagiskompis Petter är 107 cm. Hur många standardavvikelser över medel är han?
Han är 2.5 standardavvikelser över medel (Zscore$=\frac{107-97}{4} = 2.5$)

19. Om vi gör ett experiment med 4 försök där varje försök har samma sannolikhet $(\frac{2}{3})$ att lyckas vet vi att summan S av antalet lyckade försök är binomialfördelad $\mathrm{bin}(4, \frac{2}{3})$.

(a) Vilket värde på S är det minst troligt att vi får om vi utför experimentet och vad är den sannolikheten?
Eftersom varje försök har större chans att lyckas $(\frac{2}{3})$ än att misslyckas $(\frac{1}{3})$ måste det konstigaste som kan hända vara att alla försöken misslyckas dvs $S = 0$. Sannolikheten för detta är

$$P(S = 0) = (\frac{1}{3})^4 = \frac{1}{81}$$

(b) Fyra försök är inte mycket, men om vi gör hundra försök kommer binomialfördelningen att likna en kontinuerlig fördelning. Vad kallas den fördelningen?
S är en summa av stokastiska variabler som är 1 eller 0. Summor av många komponenter blir alltmer lika en normalfördelning ju fler komponenter man har.

20. En studie av 81 friska individer angav medelvärdet av en biomarkör till 750 ± 10 ng/L. I texten förklarades att 10 syftade på standardfelet (SEM). Då läsaren gärna ville veta vad standardavvikelsen (s) var räknade hon själv ut den.

(a) Vad kom hon fram till att s var?

Vi vet att SEM$=s/\sqrt{n}$ så därför

$$s = \sqrt{n} \cdot \text{SEM} = \sqrt{81} \cdot 10 = 9 \cdot 10 = 90$$

(b) Beskriv kortfattat skillnaden i användning av standardfel och standardavvikelse.

Standardavvikelsen beskriver spridningen av en variabel. Standardfelet beskriver hur noggrann en medelvärdesskattning är.

21. I en stor studie över graviditeter undersöktes bland annat riskfaktorer för förtidsbörd (barnet fött före vecka 37). En av dessa riskfaktorer är rökning.

Förtidsbörd * Rökt under graviditeten Crosstabulation

Count

		Rökt under graviditeten		
		JA	NEJ	Total
Förtidsbörd	JA	253	1954	2207
	NEJ	5891	56654	62545
Total		6144	58608	64752

(a) Beräkna riskerna bland rökare (r_e) och bland icke rökare (r_o). Beräkna också oddskvoten.

Det finns 6144 rökande gravida mammor. Av dessa får 253 sitt barn för vecka 37. Risken skattas då helt enkelt

$$r_e = \frac{253}{6144} \approx 0.041$$

på samma sätt

$$r_o = \frac{1954}{58608} \approx 0.033$$

$$\text{oddskvot} = \frac{253 \cdot 5664}{5891 \cdot 1954} \approx 1.25$$

(b) Vilken analys bör du använda för undersöka om det finns ett statistiskt signifikant samband mellan rökning och förtidsbörd.

Ett chi2-test

22. I en pilotstudie studerade man sambandet mellan postoperativ blödning (mL/12h) och preoperativ fibrinogenconcentration (g/L) vid en bestämd typ av hjärtoperation (CABG). En regressionsanalys gav följande resultat.

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	1026,728	142,707		7,195	,000
	Fibrinogen	-132,256	34,030	-,390	-3,886	,0002

a. Dependent Variable: Bleeding

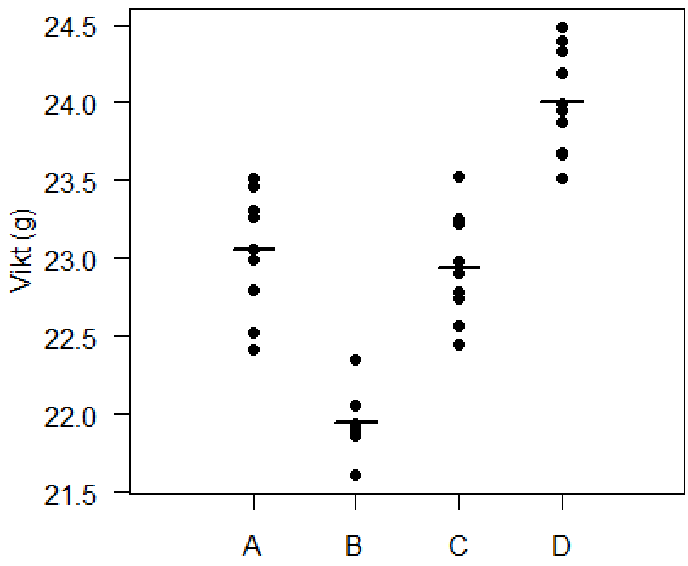
(a) Kan vi anse att det finns ett statistiskt signifikant linjärt samband mellan fibrinogen och blödning? Motivera!

Ja det kan vi p-värdet är $0.0002 < 0.05$

(b) Hur mycket kan vi förvänta oss reducera blödningen genom att öka fibronogenconcentrationen med 3g/L?

Betydelsen av lutningen $\beta_1 = -132.256$ är hur mycket blödningen ändras om fibrinogen ökar med 1 enhet. Om det ökar med 3 enheter ändras blödningen $3 \cdot (-132.256) = -396.768$. Alltså minskar blödningen med ungefär 400mL/12h

23. I en experimentell studie av dieter (A,B,C och D) vägde man mössen när de var 15 veckor. Man inledde med att testa om det fanns några skillnader mellan grupperna. Detta test gav ett p-värde på 0.003.



(a) Vad kallas detta inledande test?

ANOVA (F−test)

(b) I nästa steg gick man vidare med att utföra 6 gruppjämförelser (A mot B, A mot C, A mot D, B mot C, B mot D, C mot D) med hjälp av ett Tukey post hoc test. Vilken jämförelse bör ha fått lägst p-värde och vilken jämförelse bör ha fått högst p-värde?

Eftersom vi verkar ha lika många observationer i varje grupp bör lägst p-värde vara störst skillnad och det är mellan B och D. Högst p-värde bör vara minst skillnad och det är mellan A och C

24. Sk sporadisk Alzheimers finns hos tio procent av alla 80-åringar. Sjukdomsrisken ökar markant om man bär på genvarianten APOE4, särskilt i homozygot form (dvs APOE4 från båda föräldrarna). Hos 80-åringar finns det bara två procent APOE4 homozygota i hela populationen, men tolv procent APOE4 homozygota bland de sjuka. En ung biotekniksstudent som på en laboration bestämde samtliga sina gener konstaterade att hon var APOE4 homozygot. Vi kan alltså definiera två händelser, A: Att ha Alzheimers vid 80 år och H: Att vara APOE4 homozygot.

    (a) Vad är $P(A), P(H)$ och $P(H|A)$?
    Tolka texten och finn att P(A)= 0.1 (tio procent), P(H)=0.02 (två procent), P(H|A)=0.12 (tolv procent)

    (b) Bestäm sannolikheten att en 80-åring har både sporadisk Alzheimers och är APOE4 homozygot.

    $$P(A \cap H) = P(H|A)P(A) = 0.12 \cdot 0.1 = 0.012$$

    (c) Bestäm risken att biotekniksstudenten har sporadisk Alzheimers när hon är 80 år.

    $$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)} = 0.6$$

25. Den gamla betygsskalan 1,2,3,4,5 baserades på uppfattningen att elevers prestationer i lämplig skala kunde antas vara normalfördelade med väntevärde 3 och standardavvikelse 1. Betygen skulle därefter sättas till närmaste heltal, men lägst 1 och högst 5. Bestäm hur stor andel av eleverna som förväntades ges respektive betyg. Svara med hela procenttal.

    Betygsgränserna i $N(3,1)$-fördelningen beskrivs som 1.5, 2.5,3.5 och 4.5. Transformerat till en standard normalfördelning blir det -1.5,-0.5,0.5 och 1.5.

    $$P(1) = P(Z < -1.5) = 0.0668 \approx 7\%$$
    $$P(2) = P(Z < -0.5) - P(Z < -1.5) = 0.3085 - 0.0668 = 0.2417 \approx 24\%$$
    $$P(3) = P(Z < 0.5) - P(Z < -0.5) = 0.6915 - 0.3085 = 0.3830 \approx 38\%$$
    $$P(4) = P(2) \approx 24\%$$
    $$P(5) = P(1) = 0.0668 \approx 7\%$$

26. Sambandet mellan kvävehalt i flodvatten och procentuell andel jordbruksmark i kringliggande områden uppmättes för 40 olika floder. Man gjorde en linjär regression med kvävehalten (mg/liter) som responsvariabel och procentuell andel jordbruksmark som prediktor. Resultaten publicerades och man angav korrelationen 0.4 samt regressionsmodellen

    $$\text{kvävehalt} = 0.93 + 0.012(\text{procentandel jordbruksmark})$$

    (a) Vad är den förväntade skillnaden i kvävehalt mellan en flod omgiven av 40% jordbruksmark och en flod omgiven av 10% jordbruksmark?

    $$0.93 + 0.012 \cdot 40 - (0.93 + 0.012 \cdot 10) = 0.012 \cdot 30 = 0.36 \text{ (mg/liter)}$$

(b) Testa på signifikansnivå 0.05 om korrelationen är signifikant skild från 0.
Det här har vi inte gått genom på föreläsning, men korrelationen kan testas med

$$T = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

som är t fördelad med $n-2$ frihetsgrader. Vi får alltså

$$T = \frac{0.4\sqrt{38}}{\sqrt{1-0.4^2}} = 2.69$$

Det kritiska värdet för ett tvåsidigt test på nivå 0.05 är 2.024, så korrletionen är signifikant skild från 0.

(c) Är lutningen (β_1) signifikant skild från 0?
Test av lutning är ekvivalent med test av korrelation, så lutningen är också signifikant skild från 0.

(d) Ge ett 95%igt konfidensintervall för lutningen.
Eftersom testen är ekvivalenta vet vi att

$$T = \frac{\hat{\beta}-0}{SE(\hat{\beta})} = \frac{0.012}{SE(\hat{\beta})} = 2.69$$

Då är alltså $SE(\hat{\beta}) = 0.012/2.69 = 0.00446$ och ett 95%igt konfidensintervall blir

$$0.012 \pm 2.024 \cdot 0.00446 = 0.012 \pm 0.009 \ (0.003{,}0.021)$$

27. Vi har två händelser A och B. Om dessa vet vi att A sker med sannolikheten 0.2, både A och B med sannolikheten 0.03 och varken A eller B med sannolikheten 0.68.

(a) Undersök om A och B är oberoende.
Vi har att

$$P(A \cup B) = 1 - 0.68 = 0.32$$

och vidare

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.2 + P(B) - 0.03 = 0.17 + P(B)$$

Tillsammans ger det $P(B) = 0.15$, vilket innebär att

$$P(A)P(B) = 0.02 \cdot 0.15 = 0.03 = P(A \cap B)$$

och därmed är A och B oberoende

(b) Vad är den betingade sannolikheten $P(A|A \cup B)$?

$$P(A|A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{0.32} = \frac{0.2}{0.32} = 0.625$$

28. En Chalmersstudent extraknäcker under sommaren genom att med god förtjänst sälja fotbollströjor med texten Messi, Ronaldo eller Ibrahimovic för enhetspriset 400 kronor. Tidigare statistik visar att 50% av kunderna köper Messi, 30% köper Ronaldo och 20% köper Ibrahimovic. Studenten beräknar kunna sälja 100 tröjor. Inköpspriserna för produkterna varierar dock så att Messi kostar220 kronor, Ronaldo kostar 200 kronor och Ibrahimovic kostar 150 kronor. Allt sker utan inblandning av skattemyndigheter.

(a) Vad är den förväntade vinsten per såld tröja?
Vinsterna för en såld tröja är 180, 200 och 250 för Messi, Ronaldo respektive Ibrahimovic. Om X betecknar vinsten för en såld tröja är

$$E[X] = 0.5 \cdot 180 + 0.3 \cdot 200 + 0.2 \cdot 250 = 200$$

(b) Vad är vinstens standardavvikelse för en såld tröja?
Vinstens varians är

$$\sigma^2 = 0.5(180 - 200)^2 + 0.3(200 - 200)^2 + 0.2(250 - 200)^2 = 700$$

och standardavvikelsen alltså $\sigma = \sqrt{700} = 26.5$

(c) Studenten vill gärna tjäna åtminstone 19000 kronor på hela försäljningen. Vad är sannolikheten att lyckas med det om 100 tröjor säljs?
För att tjäna 19000 på 100 sålda tröjor behöver studenten uppnå $\bar{X} \geq 190$. Vi utnyttjar centrala gränsvärdessatsen som säger att

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - 200}{\sqrt{700}/10}$$

är approximativt standard normalfördelad. Då har vi att

$$P(\bar{X} \geq 190) = P(Z \geq \frac{190 - 200}{\sqrt{700}/10}) = P(Z \geq -3.78)$$

Ligger utanför bifogad tabell, men alla svar av typ >99% är OK.

29. Nioåriga flickors längd är ungefär normalfördelad med medellängden 135 cm och standardavvikelse 6 cm. I en tillväxtstudie avser man att följa de flickor som är kortare än 123 cm och längre än 150 cm.

(a) Hur stor andel av de nioåriga flickorna kommer man att följa?
Om vi betecknar flickans längd L så utnyttjar vi att

$$Z = \frac{L - 135}{6}$$

är standard normalfördelad

$$P(L < 123) = P(\frac{L - 135}{6} < \frac{123 - 135}{6}) = P(Z < -2) = 0.0228$$

$$P(L > 150) = P(\frac{L - 135}{6} > \frac{150 - 135}{6}) = P(Z > 2.5) = 0.0062$$

När man slår samman de två grupperna kommer alltså totalt 2.9% av flickorna att följas upp.

(b) Vad skulle gränserna varit om man avsett att följa de 5 procent kortaste samt de 5 procent längsta flickorna?
I termer av Z och med hjälp av tabell finner vi att fraktilen 1.645 uppfyller

$$P(Z > 1.645) = 0.05$$

och

$$P(Z < -1.645) = 0.05$$

vilket ger

$$L_{\text{övre}} = 135 + 1.645 \cdot 6 = 135 + 9.87 \approx 145$$

och på liknande sätt $L_{\text{nedre}} = 125$

30. Två metoder, Metohm och Orion Ross, för pH mätning jämfördes genom att båda testen utfördes på 5 olika prov. Resultaten visas nedan

Prov:	1	2	3	4	5
Metohm (pH)	5.48	6.51	7.47	6.59	5.25
Orion Ross (pH)	5.60	6.72	7.59	6.64	5.55

(a) Utför lämpligt test för att på signifikansnivå 0.05 testa om metoderna skiljer sig åt.

Vi räknar ut skillnaderna (Orion Ross - Metohm)

Prov:	1	2	3	4	5
Metohm (pH)	5.48	6.51	7.47	6.59	5.25
Orion Ross (pH)	5.60	6.72	7.59	6.64	5.55
Skillnad (D)	0.12	0.21	0.12	0.05	0.3

Den genomsnittliga skillnaden är $\bar{D} = 0.16$ och standardavvikelsen för skillnaden

$$s_D = \sqrt{\frac{1}{5-1}((0.12-0.16)^2 + \cdots + (0.3-0.16)^2)} = 0.0967$$

Ett parat t-test ger

$$T = \frac{\bar{D}}{s_D/\sqrt{n}} = \frac{0.16\sqrt{5}}{0.0967} = 3.7$$

Det kritiska värdet på 0.05 nivå för ett tvåsidigt t-test med $(5-1)$ frihetsgrader är 2.776 så vi kan förkasta H_0 och drar slutsatsen att metoderna skiljer sig åt.

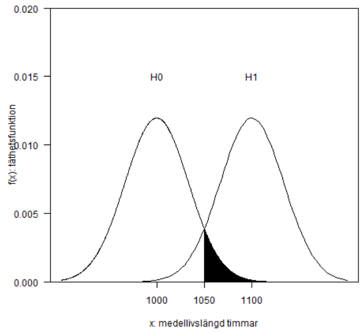
(b) Ett alternativt test hade varit teckentestet som för varje prov bara registrerar vilken metod som ger störst värde. Vilket p-värde ger den metoden i detta fall?

Vi har det mest extrema utfallet. Samtliga differenser är positiva. Sannolikheten för detta är $1/2^5$. Eftersom vi ska göra ett tvåsidigt test blir p-värdet $2/2^5 = 0.0625$

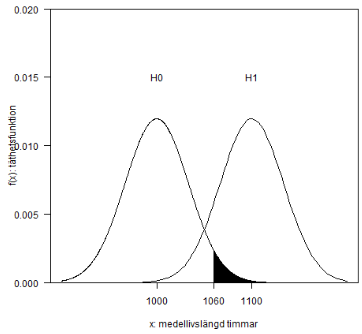
31. En glödlampstillverkare vill pröva en ny modell av glödlampor. Den gamla beprövade har en medellivslängd på 1000 timmar med en standarddeviation på 100 timmar. Man hoppas på att den nya har en medellivslängd på 1100 timmar och gör ett preliminärt test av 9 glödlampor av den nya modellen. Standarddeviationen antas vara samma som för den beprövade modellen. Man beslutar sig för att fortsätta utvecklingen av den nya modellen om man åtminstone kan uppmäta en medellivslängd på 1050 timmar på de nio glödlamporna. När testet utfördes blev den genomsnittliga livslängden 1060 timmar. Betraktat som hypotesprövning kan detta test beskrivas som ett normalfördelningstest och medelvärdets fördelning under nollhypotesen respektive alternativhyposen illustreras med figurerna 1,2 och 3 nedan.

(a) I figurerna nedan illustreras med svarta areor tre viktiga begrepp inom hypotesprövning. Ange för varje bild vilken det är.

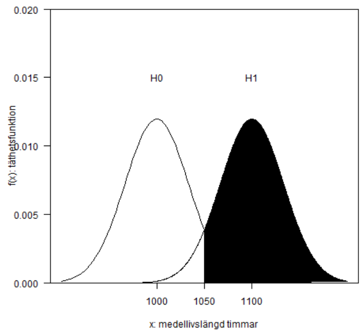
Figur 3: Signifikansnivå



Figur 4: P-värde



Figur 5: Styrka



(b) Kunde nollhypotesen förkastas?
Eftersom det observerade värdet 1060 är större än det kritiska värdet 1050 förkastar vi hypotesen att medellivslängden är lika

(c) Vad var testets signifikansnivå?

$$P(\bar{X} > 1050) = P(\frac{\bar{X} - 1100}{100/\sqrt{9}} > \frac{1050 - 1000}{100/\sqrt{9}} = P(Z > 1.5) = P(Z < -1.5) = 0.0668$$

32. Två olika legeringar för pansarplåt jämfördes genom att beskjutas med succesivt ökande utgångshastighet tills kulorna tränger genom plåten. Legering A består bara av metaller, medan legering B också innehåller Teflon.

Man utförde 15 prov med legering A och 10 med legering B

Legering	n	medel (m/s)	sd
A	15	1293	64
B	10	1404	48

(a) Ange ett 95%-igt konfidensintervall för skillnaden i utgångshastighet vid penetrering?
Vi antar att de uppmätta hastigheterna är normalfördelade och att variansen är lika i de båda grupperna. Skillnaden $(\mu_B - \mu_A)$ i medelvärde är $1404 - 1293 = 111$ m/s. Den poolade standardavvikelsen är

$$s = \sqrt{\frac{(15-1)64^2 + (10-1)48^2}{15+10-2}} = 58.3$$

t-fraktilen för 95%-igt konfidensintervall vid 23 frihetsgrader är 2.069, så konfidensintervallet ges av

$$111 \pm 2.069 \cdot 58.3\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{15}}$$
$$111 \pm 49.2$$

(b) Kan vi förkasta H_0 på signifikansnivå 0.05?
Ja, enligt dualiteten mellan konfidensintervall och test

33. I en undersökning av sambandet mellan exponering för oljud (mätt i decibel) och blodtrycksstegring (mätt i mmHg) fann man med 8 mätningar följande regressionsformel

$$\text{stegring} = -9.8 + 0.17(\text{decibelnivå})$$

Ett tvåsidigt signifikanstest av lutningen gav ett p-värde på 0.05.

(a) Vid vilken (o)ljudnivå förväntas blodtrycksstegringen uppgå till 10 mmHg?
Invertering av regressionsformeln ger

$$\text{decibelnivå} = \frac{\text{stegring} + 9.8}{0.17} = \frac{10 + 9.8}{0.7} \approx 116$$

(b) Vad hade t-statistikan för test av lutningen för värde?
t-statistikan har 6 frihetsgrader och om p-värdet i ett tvåsidigt test blev exakt 0.05 var den alltså 2.447

34. Vi har två händelser A och B. Om dessa vet vi att A sker med sannolikheten 0.2 och B med sannolikheten 0.5. Sannolikheten att varken A eller B händer är 0.4.

(a) Undersök om A och B är oberoende.

Vi vet

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B) = 0.2 + 0.5 - P(A \cap B)$$

och

$$1 - P(A \cup B) = 0.4$$

vilket ger

$$P(A \cap B) = 0.7 - P(A \cup B) = 0.7 - (1 - 0.4) = 0.1 = 0.2 \cdot 0.5 = P(A)P(B)$$

Alltså är A och B oberoende

(b) Vad är den betingade sannolikheten $P(A|B)$?

$$P(A|B) = P(A) = 0.2$$

eftersom A och B är oberoende

35. Viktandelen calcium i vanlig cement jämfördes med viktandelen i blyblandad cement. Man tog 10 prov från vanlig cement och 15 prov från blyblandad cement, med följande resultat.

Legering	n	medel (viktprocent)	sd
Blyblandad	15	87	4
Vanlig	10	90	5

(a) Ange ett 95%-igt konfidensintervall för skillnaden i viktprocent calcium i de båda cementsorterna

Vi ska förstås gör ett tvåstickprovs ttest. Den poolade variansen är

$$s_p^2 = \frac{(15-1)4^2 + (10-1)5^2}{15+10-2} = 19.52$$

och $s_p = 4.42$. tfraktilen för 95% och en t_{23}-fördelning är 2.069

$$\mu_X - \mu_Y = \bar{X} - \bar{Y} \pm 2.069 \cdot s_p \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{15}} = -3 \pm 3.73$$

(b) Kan vi förkasta H_0 på signifikansnivå 0.05?

Då det 95%-iga konfidensintervallet inte täcker 0 kan vi inte förkasta på 5%.

36. En tillverkare (A) av insektsbekämningsmedel för druvor (Pinot noir) vill demonstrera att deras produkt är överlägsen en annan produkt tillverkad av konkurrenten (B). De gör 16 försök med sin egen produkt och 9 med konkurrentens. I alla försök mäter man förändringen δ av skördeutfallet jämfört med obesprutade plantor. ($\delta > 0$ betyder förbättring)

Tillverkare	n	$\bar{\delta}$	s_δ
A	16	0.3	0.5
B	9	0.2	0.5

Därefter hävdar de att deras produkt är överlägsen konkurrentens eftersom den visade en signifikant förbättring, men det gjorde inte konkurrentens.

(a) Verifiera påståendet att A var signifikant bättre än obesprutat och att B inte var det.

Vi ska alltså göra två parade test med ensidig mothypotes. Teststatistikorna är t-fördelade med 15 frihetsgrader för A och 8 frihetsgrader för B. De kritiska värden hämtas ut tabell.

$$T_A = \frac{0.3}{0.5/\sqrt{16}} = 2.4 > 1.753 \text{ Vi kan förkasta nollhypotesen}$$

$$T_B = \frac{0.2}{0.5/\sqrt{9}} = 1.2 < 1.86 \text{ Vi kan inte förkasta nollhypotesen}$$

(b) Förklara varför detta trots allt var ett dumt sätt att resonera och gör en relevant jämförelse mellan de två produkterna.

Den relevanta jämförelsen bör göras med ett tvåstickprovstest mellan förbättringen av A och förbättringen av B. Den poolade standardavvikelsen blir 0.5 (självklart!) och den teststatistikan är t-fördelad med 16+9-2=23 frihetsgrader

$$T = \frac{0.3 - 0.2}{0.5\sqrt{1/16 + 1/9}} = 0.24 < 1.714$$

Vi kan alltså inte påstå att A är signifikant bättre än B.

37. Vid ett test av $H_0 : \mu = 0$ mot $H_1 : \mu > 0$ av en normalfördelad variabel med känd varians σ^2 var stickprovsstorlekn $n_1 = 20$ och man lyckades precis få signifikans på signifikansnivå $\alpha = 0.05$. Tyvärr fick man (obefogad) kritik för att ha använt en enkelsidig alternativhypotes och tvingades därför utöka sin studie till total stickprovsstorlek n_2. Hur stor behöver n_2 vara för att klara samma signifikansnivå med en tvåsidig mothypotes om vi antar att man får samma medelvärde?

De kritiska värdena för test med normalfördelad teststatistika på 5% nivå är 1.645 och 1.96 för en- respektive tvåsidig mothypotes. Från det första ensidiga testet hade man alltså

$$\frac{\bar{X}}{\sigma/\sqrt{n_1}} = 1.645$$

Om vi antar att vi får samma medelvärde krävs alltså

$$\frac{\bar{X}}{\sigma/\sqrt{n_2}} > 1.96$$

Tillsammans ger det

$$\frac{\bar{X}}{\sigma/\sqrt{n_2}} = 1.645\sqrt{\frac{n_2}{n_1}} > 1.96$$

och alltså

$$n_2 > 20(\frac{1.96}{1.645})^2 = 28.4$$

Alltså behöver n_2 vara minst 29.