# TAYLORS FORMEL

VECKA 4

*David Heintz, 20 november 2002*

## Innehåll

# 1 Taylors formel

Av de elementära funktionerna är det polynomen som har den enklaste strukturen. Om $f$ är ett givet polynom kan vi enkelt med vanliga räkneoperationer bestämma ett exakt värde på $f(x)$ i varje punkt $x$. Men det är inte alltid det är så lätt. För andra elementära funktioner, t.ex. $e^x$, $x^a$, $\ln(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\ldots$, kan funktionsvärden ofta bara anges som närmevärden, utom i undantagsfall.

Dessa närmevärden kan fås genom att approximera den givna funktionen med ett polynom. Ju mer noggranna vi vill vara, desto mer möda får man lägga ner på approximationen. I allmänhet innebär det att vi får ta till polynom av högre grad.

Att använda Taylors formel är ett sätt att approximera en funktion $f(x)$ med ett polynom nära en given punkt $\overline{x}$. Metoden är en generalisering av den linjära approximationen

$$f(x) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})\,(x - \overline{x})$$

samt den kvadratiska

$$f(x) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})\,(x - \overline{x}) + \frac{1}{2}\,f''(\overline{x})\,(x - \overline{x})^2$$

och inkluderar även en felterm.

**Sats.** Om $f(x)$ är en Lipschitzkontinuerlig funktion på ett intervall $I$, vars derivator upp t.o.m. ordning $n+1$ existerar och likaså är Lipschitzkontinuerliga, så har vi för $x$, $\overline{x} \in I$ att

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\overline{x}) + f'(\overline{x})\,(x - \overline{x}) + \ldots + \frac{1}{n!}\,f^{(n)}(\overline{x})\,(x - \overline{x})^n + \\ &+ \int_{\overline{x}}^{x} \frac{(x-y)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(y)\,dy. \end{aligned}$$

Polynomet

$$P_n(x) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})\,(x - \overline{x}) + \ldots + \frac{1}{n!}\,f^{(n)}(\overline{x})\,(x - \overline{x})^n \tag{1}$$

kallas Taylorpolynomet till $f(x)$ i $\overline{x}$ av ordning $n$, medan termen

$$R_n(x) = \int_{\overline{x}}^{x} \frac{(x-y)^n}{n!} f^{(n+1)}(y)\, dy \qquad (2)$$

är resttermen av ordning $n$. Minns att n-fakultet beräknas enligt

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1,$$

där vi dessutom definierar

$$0! = 1.$$

För $x \in I$ gäller alltså

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

Vi har att

$$D^k P_n(\overline{x}) = D^k f(\overline{x}), \qquad k = 0,\, 1,\, \ldots$$

varför polynomapproximationen $P_n(x)$ av ordning $n$ till $f(x)$ är sådan att derivatorna av ordning $\leq n$ för $P_n(x)$ och $f(x)$ överensstämmer i $x = \overline{x}$.

Allmänt gäller att ju fler termer vi tar med i utvecklingen, desto bättre blir vår approximation. Notera också att resttermen är liten i förhållande till polynomet, när vi befinner oss nära $\overline{x}$.

Vi bevisar inte satsen här, utan hänvisar för den sakens skull till läroboken AMBS, avsnitt 28.15 (sid 477 ff). Istället tar vi oss en titt på hur man praktiskt använder Taylors formel, genom att lösa ett par övningsuppgifter.

## 2 Uppgift 29.7

**Write down the Taylor polynomial of order $n$ for $\ln(x)$ in $x = 1$.**

Vi använder formeln för Taylorpolynomet. Man har att

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(\overline{x}) + f'(\overline{x})\,(x-\overline{x}) + \frac{1}{2}\,f''(\overline{x})\,(x-\overline{x})^2 + \ldots + \\ &+ \frac{1}{n!}\,f^{(n)}(\overline{x})\,(x-\overline{x})^n \end{aligned}$$

med $\overline{x} = 1$ enligt uppgiften. Vi vill bestämma utvecklingen termvis, och börjar därför med att beräkna derivatorna av $\ln(\overline{x})$

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x} & \Longrightarrow \quad f'(\overline{x}) = 1 \\ f''(x) = -\frac{1}{x^2} & \Longrightarrow \quad f''(\overline{x}) = -1 \\ f'''(x) = \frac{2}{x^3} & \Longrightarrow \quad f'''(\overline{x}) = 2 \\ f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4} & \Longrightarrow \quad f^{(4)}(\overline{x}) = -6. \end{cases}$$

Vi har nu beräknat så pass många derivator att vi borde kunna sluta oss till hur expansionen i sin helhet ska se ut. Insättning ger

$$\begin{aligned} P_n(x) &= 0 + 1\cdot(x-1) + \frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot(x-1)^2 + \frac{1}{6}\cdot 2\cdot(x-1)^3 + \\ &+ \frac{1}{24}\cdot(-6)\cdot(x-1)^4 + \ldots + \frac{1}{n!}\cdot(-1)^{n-1}\,(n-1)!\cdot(x-1)^n \\ &= (x-1) - \frac{1}{2}\cdot(x-1)^2 + \frac{1}{3}\cdot(x-1)^3 - \frac{1}{4}\cdot(x-1)^4 + \ldots + \\ &+ \frac{1}{n}\cdot(-1)^{n-1}\cdot(x-1)^n, \end{aligned}$$

vilket enklare kan skrivas som en summa

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\,\frac{(x-1)^k}{k},$$

där faktorn $(-1)^{k-1}$ fungerar som en "teckenväxlare", dvs. ser till så att termerna i utvecklingen får rätt tecken. En plott av $\ln(x)$ samt $P_n(x)$ i en omgivning av $\overline{x} = 1$ borde visa på god överensstämmelse (bättre ju större vi väljer $n$). Pröva för ett par värden och se! (Görs kanske enklast i MATLAB.)

## 3 Uppgift 31.9

**Give the Taylor polynomial of order $n$ with error term for $e^x$ at $x = 0$.**

Precis som i föregående uppgift använder vi oss av (1), den här gången i kombination med (2), då även feltermen efterfrågas. Att bestämma derivator till $e^x$ är tacksamt - de är ju lika oavsett ordning - och vi skriver

$$\begin{aligned} P_n(x) &= 1 + 1 \cdot (x-0) + \frac{1}{2} \cdot (x-0)^2 + \frac{1}{6} \cdot (x-0)^3 + \\ &+ \frac{1}{24} \cdot (x-0)^4 + \ldots + \frac{1}{n!} \cdot (x-0)^n, \end{aligned}$$

dvs. att

$$P_n(x) = 1 + \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{1}{6}\, x^3 + \frac{1}{24}\, x^4 + \ldots + \frac{1}{n!}\, x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, x^k$$

om vi uttrycker expansionen som en summa. Återstår gör endast att få bukt med resttermen. Vi beräknar därför

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_{\overline{x}}^{x} \frac{(x-y)^n}{n!}\, e^y\, dy = e^{\xi} \int_{\overline{x}}^{x} \frac{(x-y)^n}{n!}\, dy = e^{\xi} \left[ -\frac{(x-y)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_{\overline{x}}^{x} \\ &= e^{\xi}\, \frac{(x-\overline{x})^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

där vi med $\overline{x} = 0$ får

$$R_n(x) = e^{\xi}\, \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

för ett $\xi$ mellan 0 och $x$.

Att vi kan skriva resttermen på det sätt vi gör följer ur integralkalkylens generaliserade medelvärdessats.

**Sats.** Om funktionerna $f$ och $g$ är kontinuerliga och om $g(x) \geq 0$ i $[a,\, b]$ så finns ett tal $\xi$ mellan $a$ och $b$ så att

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\, dx.$$

Vi skulle kunna bestämma resttermen exakt om vi löser integralen, men trots allt var det en approximation av $e^x$ med ett polynom vi sökte. Att då få en uttryck som innehåller en term med $e^x$ (samt $n+1$ “bonustermer”) kan tyckas onödigt. Hursomhelst får vi här, utan att egentligen behöva lösa någon integral, en uppfattning om felets storlek. $R_n(x)$ är tydligen lika med en konstant multiplicerat med $x^{n+1}$, vilket säger oss att felet ökar ju längre bort från $\overline{x} = 0$ man kommer.

Ett fullständigt svar ges till slut av

$$f(x) \quad = \quad P_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, x^k + e^{\xi}\, \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

där $0 \leq \xi \leq x$.

Vi är klara.