TMA196 Analys och linjär algebra K Kf Kb, del B, 2002–04–06. Lösningar.

---

1. (a) Se boken.

(b) Partiell integration: $\displaystyle\int_a^b uv'\,dx = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b u'v\,dx$. Bevis, se boken.

(c) Partiell integration:

$$\begin{aligned}\int_0^x y^3\exp(-y^2)\,dy &= -\tfrac{1}{2}\int_0^x y^2(-2y\exp(-y^2))\,dy\\ &= -\tfrac{1}{2}\int_0^x y^2\frac{d}{dy}\exp(-y^2)\,dy\\ &= -\tfrac{1}{2}\Big[y^2\exp(-y^2)\Big]_0^x + \int_0^x y\exp(-y^2)\,dy\\ &= -\tfrac{1}{2}x^2\exp(-x^2) - \tfrac{1}{2}\int_0^x \frac{d}{dy}\exp(-y^2)\,dy\\ &= -\tfrac{1}{2}x^2\exp(-x^2) + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\exp(-x^2) = \tfrac{1}{2}\Big(1-(1+x^2)\exp(-x^2)\Big).\end{aligned}$$

(d) Variabelsubstitution:

$$\int_0^2 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left\{\begin{aligned} z&=1+x^2\\ dz&=2x\,dx\end{aligned}\right\} = \frac{1}{2}\int_1^5 \frac{1}{z}\,dz = \frac{1}{2}\Big[\log(z)\Big]_1^5 = \frac{1}{2}\log(5).$$

(e) Taylors polynom är: $P(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$. Taylors formel är: $\exp(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + R_3(x,0)$, $R_3(x,0) = \frac{1}{24}\exp(\hat{x})x^4$, där $\hat{x}$ ligger mellan x och 0.

2. (a) Filen `funk.m` innehåller:

```
function y=funk(t,x)
y=-3*x;
```

Vi skriver följande på Matlabs kommandorad:

```
>>    [t,u]=my_ode('funk', [0, 2], 5, .01); plot(t,u)
```

Lösningen är: $u(t) = 5\exp(-3t)$.

(b) $u(t) = \cos(3t) + \frac{1}{3}\sin(3t)$.

(c) Differentialekvationen är separabel:

$$\begin{aligned}&-\frac{du}{u^3} = 1\\ &\int_{u_0}^{u(T)} \frac{-1}{u^3}\,du = \int_0^T dt\\ &\left[\frac{1}{2u^2}\right]_{u_0}^{u(T)} = T\\ &\frac{1}{u(T)^2} = 2T + \frac{1}{u_0^2}\\ &u(T)^2 = \frac{u_0^2}{1+2Tu_0^2}\\ &u(t) = \pm\sqrt{\frac{u_0^2}{1+2tu_0^2}} = \frac{u_0}{\sqrt{1+2tu_0^2}},\end{aligned}$$

där vi i sista steget valde tecknet med hjälp av begynnelsevillkoret $u(0) = u_0$.

(d) Egenvärdesproblemet löses, sedan fås

$$\begin{aligned}
x(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} g_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} g_2 \\
&= c_1 e^t \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(x_{01} + x_{02}) e^t \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-x_{01} + x_{02}) e^{-t} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\
&= \tfrac{1}{2}(x_{01} + x_{02}) e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2}(-x_{01} + x_{02}) e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= x_{01} \begin{bmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{bmatrix} + x_{02} \begin{bmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

3. (a) $R(A)$ är mängden av alla linjärkombinationer av kolonnerna i A, dvs

$$R(A) = \{y \in \mathbf{R}^4 : Ax = y, \text{ för något } x \in \mathbf{R}^4\}.$$

(b) Vi lägger till b och c som extra kolonner i A:

$$\begin{bmatrix} A \; b \; c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

Gauss eliminationsmetod leder till en trappstegsmatris:

$$\begin{bmatrix} \hat{A} \; \hat{b} \; \hat{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ekvationssystemet $Ax = b$ är alltså ekvivalent med systemet $\hat{A}x = \hat{b}$, dvs

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 3, \\
x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1, \\
x_3 &= 0
\end{aligned}$$

med lösningarna $x_4 = s$, $x_3 = 0$, $x_2 = 1 - 2x_3 - 3x_4 = 1 - 3s$, $x_1 = 3 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 + 2s$, där s är godtycklig, dvs

$$x = \begin{bmatrix} 1+2s \\ 1-3s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ekvationssystemet $Ax = c$ är ekvivalent med systemet $\hat{A}x = \hat{c}$, dvs

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 1, \\
x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -\tfrac{2}{5}, \\
x_3 &= \tfrac{2}{5}, \\
0 &= 1,
\end{aligned}$$

vilket saknar lösning.

(c) Resultatet i (b) visar att b men inte c tillhör $R(A)$.

(d) De tre första kolonnerna i trappstegsmatrisen $\hat{A}$ är linjärt oberoende och utgör en bas för dess värderum $R(\hat{A})$. Då utgör de tre första kolonnerna i A också en bas för dess värderum $R(A)$. Dvs vektorerna

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

är en bas för $R(A)$. Dess dimension är 3, vilket är detsamma som rangen för A.

4. (a) Ekvationen $f(x) = 0$ betyder

$$\begin{aligned} -2(x_1 - 1) + x_2 e^{x_1} &= 0, \\ -2x_2 - x_2 e^{x_1} &= 0. \end{aligned}$$

Den andra ekvationen ger $x_2 = 0$, den första ger sedan $x_1 = 1$. Det finns alltså en enda lösning $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(b) Jacobimatrisen är

$$f'(x) = \begin{bmatrix} -2 + x_2 e^{x_1} & e^{x_1} \\ -x_2 e^{x_1} & -2 - e^{x_1} \end{bmatrix}.$$

(c) Första steget i Newtons metod:

$$\begin{aligned} &\text{evaluera:} \quad A = f'(x^{(0)}) = f'(0,1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \\ &\qquad\qquad\quad b = -f(x^{(0)}) = -f(0,1) = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &\text{lös ekvationssystemet } Ah = b: \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -1.5 \end{bmatrix} \\ &\text{uppdatera:} \quad x^{(1)} = x^{(0)} + h = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.5 \\ -1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

vi kom lite närmare $\bar{x}$!

5. (a), (b), (c) se boken.

(d) Vi använder högra respektive vänstra rektangelregeln med steget $h = 1$ för att approximera integralen $\log(4) = \int_1^4 x^{-1}\,dx$. Vi får

$$1 < \frac{13}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} < \log(4) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} < 2.$$

/stig