TMV033 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B, 2002-12-19. Lösningar.

---

1. $\frac{1}{2}\arctan(2t)$

2. $u(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+4y^2}\,dy = 1 + \frac{1}{2}\arctan(2x)$

3. Filen `funk.m` innehåller:

```
function y=funk(t,x)
y=(1+4*x^2)^(-1);
```

Vi skriver följande på MATLABs kommandorad:

```
>> [t,U]=my_ode('funk', [0, 3], 1, .01);
```

4. $-2\cos(2) + \sin(2)$

5. $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$

6. $\begin{cases} w' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} w, \\ w(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$ med lösning $w_1(t) = \sin(t)$, $w_2 = \cos(t)$.

7. $u(t) = u_0 e^{-3t} + \int_0^t e^{-3(t-s)} b\,ds = u_0 e^{-3t} + \frac{b}{3}(1 - e^{-3t}) = (u_0 - \frac{b}{3})e^{-3t} + \frac{b}{3}$

8. —

9. $u(t) = \dfrac{u_0}{1 - u_0 t}$

10. $u(t) = 2\exp(-t) - \exp(-2t)$

---

11. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ och $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) För att lösa $Ax = b$ omvandlar vi den utvidgade matrisen $[A \mid b]$ till trappstegsform med hjälp av Gauss eliminationsmetod. Vi får

$$[\hat{A} \mid \hat{b}] = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 5 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & \mathbf{-4} & -2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-1} & | & 0 \end{bmatrix}$$

Vi löser det ekvivalenta ekvationssystemet $\hat{A}x = \hat{b}$, dvs

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + x_3 &= 1 \\ -4x_2 - 2x_3 + x_4 &= -1 \\ 2x_3 - 2x_4 &= 0 \\ -x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Lösningen blir

$$x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) Trappstegsformen visar att kolonnerna i A är linjärt oberoende och därmed en bas för $R(A)$. Den är

$$a_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix}5\\6\\7\\8\end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad a_4 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

(c) Vi har enligt (a)

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = b = Ax = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix}5\\6\\7\\8\end{bmatrix}.$$

(d) Räkningarna i (a) visar direkt: $\det(A) = \det(\hat{A}) = 1 \cdot (-4) \cdot 2 \cdot (-1) = 8 \neq 0$. (Obs att vi har inte brutit ut några tal.) Då är A icke-singulär.

(e) $f(\alpha x + \beta y) = A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = \alpha f(x) + \beta f(y)$.

12. (a) Sätt $w_1 = u$, $w_2 = u'$, så fås

$$\begin{aligned} w_1' &= u' = w_2 \\ w_2' &= u'' = -\sin(u) - (u')^2 = -\sin(w_1) - w_2^2 \end{aligned}$$

vilket är det önskade systemet

$$\begin{aligned} w' &= f(w), \\ w(0) &= w_0, \end{aligned} \qquad \text{med } f(w) = \begin{bmatrix} w_2 \\ -\sin(w_1) - w_2^2 \end{bmatrix}, \quad w_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}.$$

(b) De stationära lösningarna ges av $f(w) = 0$, dvs

$$\begin{aligned} w_2 &= 0 \\ -w_1 - w_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

med lösningarna $w_2 = 0$, $w_1 = n\pi$, $n = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

(c) Jacobi-matrisen är

$$f'(w) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(w_1) & -2w_2 \end{bmatrix}, \quad f'(\pi/4, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Linjäriseringen av f i punkten $\bar{w} = \begin{bmatrix} \pi/4 \\ 0 \end{bmatrix}$ blir

$$\tilde{f}(w) = f(\bar{w}) + f'(\bar{w})(w - \bar{w}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 - \pi/4 \\ w_2 - 0 \end{bmatrix},$$

(d) —

13. Se boken.

/stig