PROBLEM

VI. Optimering

1. Taylorutveckla $f(x, y) = x^3 + 2xy + y^2 - 1$ till andra ordning kring punkten $(0, 0)$.

2. Taylorutveckla $f(x, y) = \frac{x}{y}$ till andra ordning kring punkten $(1, 1)$.

3. Givet funktionen $f = -x^2 - 5y^2 + 8x - 10y - 13$.

a. Beräkna Hessianmatrisen H till f i punkten $(4, -1)$.

b. Ange om Hessianen är positivt definit, negativt definit eller indefinit.

c. Avgör om $(4, -1)$ är en minpunkt, maxpunkt eller sadelpunkt till f.

4. Bestäm karaktären av origo för Gausspulsen $f(x) = e^{-x_1^2 - x_2^2}$.

5. Bestäm alla stationära punkter till

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + xy.$$

6. Sök eventuella lokala extremvärden till funktionen f, given av

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy.$$

7. Sök eventuella lokala extremvärden till funktionen

$$f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4.$$

8. Bestäm alla stationära punkter till funktionen

$$f(x, y) = x^2 + y^3 - 3y.$$

Avgör sedan för var och en av dem, av vilken typ den är.

VII. Divergens och rotation

1. Beräkna divergensen $\nabla \cdot F$ och rotationen $\nabla \times F$ då

a. $F(x, y) = \alpha(x, y, 0)$.

b. $F(x, y) = \alpha(-y, x, 0)$.

2. Bestäm divergensen $\nabla \cdot A$ då

a. $A = (x, y, z)$.
b. $A = (x^2 - 3y, z^2 - y, z^2)$.

3. Beräkna rotationen $\nabla \times F$ av vektorfältet $F = (z, x, y)$.

4. Visa, att $\nabla \times (\nabla f) = 0$ för alla funktioner $f(x, y, z)$.

5. Låt potentialfunktionen $V(x, y, z)$ ges av

$$V(x, y, z) = x \sin(y - z) - y + \tfrac{1}{2} z^2.$$

Beräkna a) ∇V och b) $\nabla \times (\nabla V)$.

6. Beräkna divergensen av vektorfältet F då

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \quad x, y \neq 0.$$

7. Visa att vektorfältet $F(x, y, z) = (2xy^3, 1 + 3x^2y^2, 3z^2)$ är konservativt, dvs att $\nabla \times F = (0, 0, 0)$.

8. Bestäm rotationen $\nabla \times B$ om $B = (yz, y \sin z, y \cos x)$.

9. Visa att vektorfältet

$$E(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

är källfritt (dvs. att $\nabla \cdot E = 0$) i varje område utom origo.

10. Beräkna $\nabla \times A$ av vektorfältet $A = (ye^x, xe^y, z)$.

11. Låt $\phi(x, y, z) = xyz^2 + 2y - z$. Beräkna a) $\nabla \phi$ och b) $\nabla \times (\nabla \phi)$.

VIII. Kurvintegraler

1. Beräkna linjeintegralen längs den givna kurvan C

(a) $\oint_C y\,ds, \quad C : x = t^2, y = t,\ 0 \leq t \leq 2.$

(b) $\oint_C xy^3\,ds, \quad C : x = 4 \sin t, y = 4 \cos t, z = 3t,\ 0 \leq t \leq \pi/2.$

2. Beräkna kurvintegralen

$$\oint_C (3 + x + y)\,ds,$$

längs cirkeln $C = \{(x, y) : x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi\}$.

3. Beräkna

$$\oint_{\Gamma}(xy+z)ds,$$

längs den parametriserade kurvan $\Gamma = (\sin t, \cos t, t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

4. Ett kraftfält i planet ges av $F = (x - y + 1, y)$. Bestäm arbetet

$$\oint_{\gamma} F \cdot dr,$$

som utförs av F på en partikel som förflyttas längs kurvan $\gamma : x^2 = y^3$ från punkten $(0,0)$ till punkten $(1,1)$.

5. Beräkna

$$I_1 = \oint_{\Gamma_1} xydx + (x-y)dy,$$

där $\Gamma_1 = \{(x,y) : x = t, y = 1-t, 0 \leq t \leq 1\}$.

6. Beräkna

$$\oint_{\Gamma} ydx + xdy,$$

längs räta linjestycket Γ från $(1,2)$ till $(3,4)$.

7. Antag, att en partikel flyttas längs kurvan σ parametriserad av (t, t^2) med $-1 \leq t \leq 1$, samt utsätts för kraften $F = (x, y)$. Beräkna arbetet

$$W = \oint_{\sigma} F \cdot dr,$$

som kraftfältet F uträttar på partikeln.

8. Beräkna arbetet

$$W = \oint_{C} F \cdot dr,$$

som kraftfältet $F = (x, y, x)$ uträttar på en partikel som flyttas längs kurvan $C(t) = (x_0 + r_0 \cos t, y_0 + r_0 \sin t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

9. Beräkna linjeintegralen

$$\oint_{C} \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right) \cdot dr,$$

längs en positivt orienterad cirkel C med radie R och centrum i origo.

10. Beräkna linjeintegralen $\oint_\Gamma F \cdot dr$, där kurvan Γ ges av funktionen $r(t)$.

   (a) $F = (x^2y^3, -y\sqrt{x})$, $r(t) = (t^2, -t^3)$, $0 \leq t \leq 1$.
   (b) $F = (x^2, xy, z^2)$, $r(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

Svar

VI. Optimering

1. $f(x,y) = y^2 + 2xy - 1$ nära origo.

2. $f(x,y) = (y-1)^2 - x(y-2)$ nära punkten $(1,1)$.

3. $H = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$

4. Origo är en maxpunkt.

5. Origo är sadelpunkt med Hessian $H = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

6. Origo $(0,0)$ är sadelpunkt med $H = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$. Punkterna $(1,1)$ och $(-1,-1)$ är lokala minima med $H = \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}$.

7. Lokalt minimum i $(-1/4, -1/4)$ med $H = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

8. Lokalt minimum i $(0,1)$ och sadelpunkt i $(0,-1)$.

VII. Divergens och rotation

1. a) $\nabla \cdot F = 2\alpha$ och $\nabla \times F = (0,0,0)$, b) $\nabla \cdot F = 0$ och $\nabla \times F = (0,0,2\alpha)$

2. a) 3 b) $-1 + 2x + 2z$

3. $(1,1,1)$

4. -

5. a) $\nabla V = (\sin(y-z), -1 + x\cos(y-z), z - x\cos(y-z))$
b) $\nabla \times (\nabla V) = (0,0,0)$

6. 0

7. -

8. $\nabla \times B = (\cos x - y\cos z, y + y\sin x, -z)$

9. -

10. $\nabla \times A = (0, 0, e^y - e^x)$

11. a) $\nabla \phi = (yz^2, 2 + xz^2, -1 + 2xyz)$
b) $\nabla \times (\nabla \phi) = (0, 0, 0)$

VIII. Kurvintegraler

1. a) $\frac{1}{12}(17^{3/2} - 1)$
b) 320

2. 6π

3. $\pi^2/\sqrt{2}$

4. $7/5$

5. $1/6$

6. 10

7. 2

8. 0

9. 0

10. a) $-59/105$
b) $\pi^6/192$