Tentamen.

TMA225 *Differentialekvationer och Tekniska Beräkningar* del A, för K1 och Kf1.

30 augusti 2002, fm. Inga hjälpmedel. Totalt 50p.

Telefonjour/rond: Mats Kjaer (0740-459022)

1. Låt rummet V_h av kontinuerliga styckvis linjära funktioner på en indelning $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$ av $(0, 1)$ vara givet.
(a) Definiera L^2-projektionen $P_h g \in V_h$ av en given funktion g. (1p)
(b) Definiera $L^2(0, 1)$-normen och beräkna $\|x^5\|_{L^2(0,1)}$. (1p)
(c) Formulera *och* bevisa en uppskattning av felet $g - P_h g$ i $L^2(0, 1)$-normen. Förklara vad som händer med felet då indelningen av $(0, 1)$ görs finare. (4p)
(d) Härled ett ekvationssystem som bestämmer $P_h g$. (2p)
(e) Uttryck elementen i matrisen i termer av noderna $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$. (2p)
(f) Låt $g = x^2$. Använd nodkvadratur för att approximera elementen i matrisen och högerledet. Hur löser man enklast det resulterande ekvationssystemet? (2p)

2. Låt $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ vara ett (polygon)område och f en funktion definierad på Ω.
(a) Beskriv vad en triangulering av Ω är. Rita en figur. (1p)
(b) Ange en formel för beräkning av $\int_\Omega f(x, y)\, dxdy$ genom att använda *mittpunktskvadratur* på varje triangel. Uttryck alla kvantiteter, som beror av triangeln, i termer av koordinaterna $a^i, i = 1, 2, 3$ för triangelns hörn. (3p)
(c) Låt $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ och $f(x, y) = xy$. Beräkna approximativt $\int_\Omega f(x, y)\, dxdy$ för den triangulering med fyra lika stora trianglar som fås genom att införa en nod i $(1/2, 1/2)$. Hur stort är felet? (3p)
Kommentar: Med mittpunktskvadratur avses här den *en*-punktsformel som använder triangelns tyngdpunkt som kvadraturpunkt, men om du vill kan du alternativt använda den *tre*-punktsformel som använder triangelsidornas mittpunkter som kvadraturpunkter.

3. (a) Låt $g(x, y) = x^3 \sin y$. Beräkna $\partial g/\partial x$, $\partial^2 g/\partial x \partial y$, ∇g och Δg. (2p)
(b) Låt $\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$. Låt randen $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ med Γ_1 linjestycket mellan $(0, 1)$ och $(0, -1)$ och $\Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1$. Bestäm f, g_D, och g_N så att $u(x, y) = x^2 + y^2$ är en lösning till ekvationen:

$$-\nabla \cdot (1 + x)\nabla u = f \quad \text{i } \Omega, \tag{1}$$
$$u = g_D \quad \text{på } \Gamma_1, \tag{2}$$
$$-n \cdot (1 + x)\nabla u = g_N \quad \text{på } \Gamma_2, \tag{3}$$

där n betecknar den *utåtriktade* enhetsnormalen på Γ_2. (3p)

4. Betrakta problemet: Finn $u = u(x, y)$ så att

$$-\nabla \cdot a\nabla u = f \quad \text{i } \Omega, \tag{4}$$
$$-n \cdot a\nabla u = \gamma(u - g_D) + g_N \quad \text{på } \partial\Omega. \tag{5}$$

(a) Ange vad $\Omega, \partial\Omega, a, f, \gamma, g_D, g_N, n$, och ∇ är. (2p)
(b) Ange en variationsformulering av problemet. (2p)
(c) Formulera en finit element-metod baserad på variationsformuleringen i (b). (2p)
(d) Antag att $a > 0$ och $\gamma > 0$. Visa att finita element-lösningen U är entydigt bestämd. Vilken slutsats kan du dra om existens av U (motivera väl)? (2p)
(e) Beskriv hur man kan approximera randvillkoret $u = g_D$ med hjälp av (5). (2p)

5. Låt K vara triangeln med hörn $N_1 = (0,0)$, $N_2 = (2,0)$ och $N_3 = (1,1)$.
(a) Beräkna analytiska uttryck för element-basfunktionerna $\lambda_i(x,\, y)$, $i = 1,2,3$, för rummet $\mathcal{P}(K)$ av linjära funktioner på K, definierade av att

- λ_i är linjär på Ω,
- $\lambda_i(N_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$ (2p)

(b) Visa att en linjär funktion, definierad på K, kan skrivas på ett entydigt sätt som en linjärkombination av $\{\lambda_i\}$. (2p)

(c) Beräkna integralen
$$\int_{\partial K} (n \cdot \nabla \lambda_1) \lambda_2 \, ds. \qquad \text{(2p)} \tag{6}$$

6. (a) Beskriv en adaptiv finit element-algoritm. (2p)
(b) Beskriv Rivara-förfining av en triangulering. (2p)

7. Betrakta problemet
$$\begin{aligned} 2\dot{\xi}(t) \,+\, t\,\xi(t) \,&= t \quad \text{för } 0 < t < T, \\ \xi(0) \,&= 2. \end{aligned}$$

(a) Lös problemet analytiskt. (2p)
(b) Formulera framåt och bakåt Euler för problemet. (2p)
(c) Låt $T = 1$ och dela in $(0,1)$ i två lika långa intervall. Beräkna en approximation av $\xi(1)$ med hjälp av bakåt Euler. Hur stort är felet? (Du kan räkna med två decimaler och därvid ha nytta av approximationen $\exp(-\frac{1}{4}) \approx 0.78$). (2p)