Tentamen.

TMA225 *Differentialekvationer och Tekniska Beräkningar* del A, för K1 och Kf1.
1 juni 2002, 14.15–18.15. Inga hjälpmedel. Totalt 50p.
Telefonjour/rond: Axel Målqvist (0740-459022)

1. Låt rummet V_h av kontinuerliga styckvis linjära funktioner på en indelning $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$ av $(0,1)$ vara givet.
(a) Definiera interpolanten $\pi_h g \in V_h$ av en given funktion g. Rita en figur som illustrerar definitionen. (1p)
(b) Formulera *och* bevisa en uppskattning av interpolationsfelet i $L^\infty(0,1)$-normen. (5p)
(c) Formulera motsvarande uppskattning i $L^2(0,1)$-normen. (1p)
(d) Antag att intervallet $(0,1)$ delas i N lika långa delintervall och låt $g(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$. För vilka α kan du från interpolationsfeluppskattningar dra slutsatsen att vi får konvergens av andra ordningen i $L^\infty(0,1)$ respektive $L^2(0,1)$? (2p)

2. Låt en funktion f vara definierad på intervallet $I = (0,1)$.
(a) Ange en formel för beräkning av $\int_I f(x)\,dx$ genom att dela in I i N lika långa delintervall och använda *mittpunktskvadratur* på varje delintervall. (2p)
(b) Låt $f(x) = 1/(1+x)$. Beräkna approximativt $\int_I f(x)\,dx$ med hjälp av formeln i (a) för $N = 1, 2$ och 3. (2p)
(c) Låt $N = 1$ och visa att mittpunktsformeln är exakt för linjära funktioner $f(x) = a + bx$, $a, b \in \mathbf{R}$. (2p)
(d) Hur används kvadratur i en implementering av finita element-metoden? (1p)
(e) Skriv upp mittpunktsformeln på en triangel T med hörn $a^i = (a_1^i,\, a_2^i) \in \mathbf{R}^2$, $i = 1, 2, 3$. Uttryck alla kvantiteter, som beror av triangeln, i termer av a^i, $i = 1, 2, 3$. *Kommentar:* Med "mittpunktsformeln" avses här den *en*-punktsformel som använder triangelns tyngdpunkt som kvadraturpunkt, men om du vill kan du alternativt skriva upp den *tre*-punktsformel som använder triangelsidornas mittpunkter som kvadraturpunkter. (2p)

3. (a) Låt $g(x,y) = x^2 + xy + y^3$. Beräkna $\partial^2 g/\partial x \partial y$, ∇g och $\nabla \cdot (xy \nabla g)$. (2p)
(b) Låt Ω vara triangeln med hörn $b^1 = (0,0)$, $b^2 = (2,0)$ och $b^3 = (0,1)$. Låt randen $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ med Γ_1 linjestycket mellan b^1 och b^2, Γ_2 linjestycket mellan b^2 och b^3, och Γ_3 linjestycket mellan b^1 och b^3. Bestäm f, g_D, och g_N så att $u(x,\, y) = x^2 + y^2$ är en lösning till ekvationen:

$$-\Delta u = f \quad \text{i } \Omega, \tag{1}$$
$$-n \cdot \nabla u = g_N \quad \text{på } \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \tag{2}$$
$$u = g_D \quad \text{på } \Gamma_3, \tag{3}$$

där n betecknar den *utåtriktade* enhetsnormalen på randen. (3p)

4. Betrakta problemet: Finn $u = u(x,\, y)$ så att

$$-\Delta u = f \quad \text{i } \Omega, \tag{4}$$
$$u = 0 \quad \text{på } \partial\Omega, \tag{5}$$

där $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ är ett givet område, och $f = f(x,\, y)$ en given funktion definierad på Ω.
(a) Ange en variationsformulering av problemet. (2p)
(b) Formulera en finit element-metod baserad på variationsformuleringen i (a). (2p)
(c) Visa att

$$\iint_\Omega \nabla(u-U)\cdot\nabla v\, dxdy = 0, \tag{6}$$

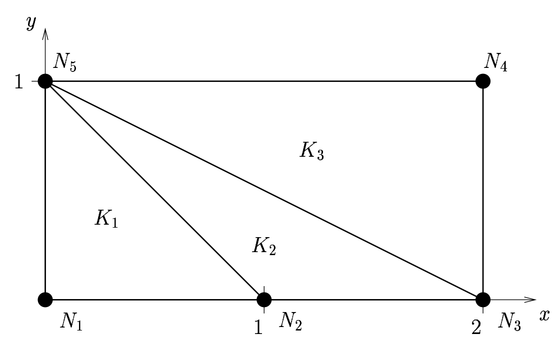
för alla $v \in V_{h0}$. (2p)
(d) Definiera $L^2(\Omega)$-normen $\|g\|_{L^2(\Omega)}$ av en funktion g. Beräkna $\|g\|_{L^2(\Omega)}$ då $\Omega = (0,1)\times(0,1)$ och $g(x,\, y) = xy$. (2p)
(e) Formulera *och* bevisa en a priori-feluppskattning för finita element-metoden i (b). (4p)

5. Låt Ω vara samma triangel som i problem 3(b). Inför nodnumreringen $N_1 = b^1 = (0,0)$, $N_2 = b^2 = (2,0)$ och $N_3 = b^3 = (0,1)$.
(a) Beräkna analytiska uttryck för element-basfunktionerna $\lambda_i(x,\, y)$, $i = 1,2,3$, för rummet $\mathcal{P}(\Omega)$ av linjära funktioner på Ω, definierade av att

- λ_i är linjär på Ω,
- $\lambda_i(N_j) = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$ (3p)

(b) Beräkna element-styvhetsmatrisen $A = (a_{ij})_{i,j=1}^3$ med $a_{ij} = \iint_\Omega \nabla\lambda_j\cdot\nabla\lambda_i\, dx\, dy$. (3p)

6. (a) Beskriv en adaptiv finit element-algoritm. (2p)
(b) Beskriv Rivara-förfining av en triangulering. (2p)
(c) Antag att triangel K_3 i trianguleringen i Figur 1 skall förfinas. Rita den triangulering som du erhåller ifall du gör Rivara-förfining. (1p)



Figur 1: Den ursprungliga trianguleringen i Problem 6(c).

7. Beskriv en algoritm för att lösa systemet av ordinära differentialekvationer

$$\begin{aligned} M\,\dot{\xi}(t) \;+\; A\,\xi(t) \; &= b(t) \quad \text{för } 0 < t < T, \\ \xi(0) &= \xi^0, \end{aligned}$$

med *bakåt Euler*. (4p)