

Konvektion 1

Konvektivt flöde: Har redan betraktat **diffusivt flöde**

$$q = -a \nabla u,$$

av värme eller materia, med u en temperatur alternativt koncentration, och a konduktivitet alternativt diffusivitet, och där $u = u(x, t)$ och $a = a(x, t, u)$.

Skall fr.o.m nu inkludera även **konvektivt flöde**

$$q_c = u b,$$

där $b = (b_1, b_2, b_3)$ är ett given hastighetsfält, med $b = b(x, t, u)$ i allmänhet.

.. P-1/22

Konvektion 3

Den resulterande "kontinuitetsekvationen" blir

$$c \dot{u} = f - \nabla \cdot q = f - \nabla \cdot (u b - a \nabla u),$$

dvs

$$c \dot{u} + \underbrace{\nabla \cdot (u b)}_{\text{ny term}} - \nabla \cdot a \nabla u = f.$$

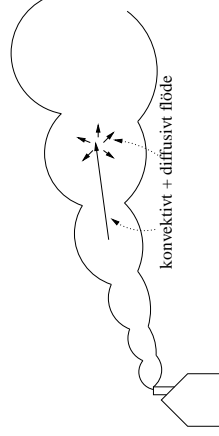
Eftersom vi här även kan tänka oss att $f = f(x, t, u)$ inkluderar modellen nu konvektion-diffusion-reaktion.

.. P-3/22

Konvektion 2

Detta ger ett **totalt flöde**

$$q = q_c + q_d = u b - a \nabla u.$$



.. P-2/22

Konvektion 4

Vi noterar att $u b = u (b_1, b_2, b_3) = (u b_1, u b_2, u b_3)$ och följaktligen, med $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$,

$$\nabla \cdot (u b) = \sum_i \partial_i u b_i + \sum_i u \partial_i b_i = \nabla u \cdot b + u \nabla \cdot b.$$

Speciellt gäller för $\nabla \cdot b = 0$, dvs för **divergensfritt** fält b , att $\nabla \cdot (u b) = b \cdot \nabla u = \partial_b u$, och att kontinuitetsekvationen reduceras till

$$c \dot{u} + \partial_b u - \nabla \cdot a \nabla u = f.$$

.. P-4/22

Konvektion 5

Randvillkor:

Vi betraktar nu en konvektions-diffusions-reaktionsprocess i ett givet flöde, dvs hastighetsfält b , i ett område Ω med rand Γ och med utåtriktad enhetsnormal n till Γ .

För hastighetsfält b sådana att $b \perp n$ längs Γ , dvs utan in eller utflöde genom Γ , kan randvillkoren för u fortfarande tänkas ha formen

$$-a \partial_n u = \gamma(u - g_D) + g_N,$$

dvs det **diffusiva flödet** genom Γ är summan av ett givet flöde g_N och ett flöde proportionellt mot temperatur- eller koncentrationsdifferensen tvärs Γ .

.. P.6/22

Konvektion 7

Alternativt kan vi för $b \perp n$ förstås utnyttja att

$$\int_{\Omega} v \nabla \cdot (ub) = \int_{\Gamma} v n \cdot \underbrace{(ub)}_{=0} - \int_{\Omega} \nabla v \cdot (ub) = - \int_{\Omega} b \cdot \nabla v u,$$

till att skriva kontinuitetsekvationen på formen

$$\int_{\Omega} v \dot{u} - \int_{\Omega} \nabla v \cdot ub + \int_{\Omega} \nabla v \cdot a \nabla u + \int_{\Gamma} v \gamma u = \int_{\Omega} v f + \int_{\Gamma} v g.$$

Notera att denna formulering inte bygger på att b är divergensfritt, som var fallet ovan.

.. P.7/22

Konvektion 5

Randvillkor:

Vi betraktar nu en konvektions-diffusions-reaktionsprocess i ett givet flöde, dvs hastighetsfält b , i ett område Ω med rand Γ och med utåtriktad enhetsnormal n till Γ .

För hastighetsfält b sådana att $b \perp n$ längs Γ , dvs utan in eller utflöde genom Γ , kan randvillkoren för u fortfarande tänkas ha formen

$$-a \partial_n u = \gamma(u - g_D) + g_N,$$

dvs det **diffusiva flödet** genom Γ är summan av ett givet flöde g_N och ett flöde proportionellt mot temperatur- eller koncentrationsdifferensen tvärs Γ .

.. P.6/22

Konvektion 6

Variationsformulering: För att hitta en **variationsformulering** av problemet

$$c \dot{u} + \partial_b u - \nabla \cdot a \nabla u = f \quad \text{i } \Omega,$$

med randvillkor

$$-a \partial_n u = \gamma(u - g_D) + g_N \quad \text{på } \Gamma,$$

och givet begynnelsevillkor som tidigare, multiplicerar vi med testfunktion v och integrerar över Ω . Med partiell integration erhålls

$$\int_{\Omega} v c \dot{u} + \int_{\Omega} v \partial_b u + \int_{\Omega} \nabla v \cdot a \nabla u + \int_{\Gamma} v \gamma u = \int_{\Omega} v f + \int_{\Gamma} v g,$$

där $g = \gamma g_D - g_N$.

.. P.6/22

Konvektion 6

Diskretisering: Som tidigare inför vi tidsintervall $I_n = [t_{n-1}, t_n]$, av längd $k = k_n$, och ansätter för $t \in I_n$

$$U(x, y) = U_{n-1}(x) \psi_{n-1}(t) + U_n(x) \psi_n(t),$$

där $U_n(x) = U_{n,1} \phi_1(x) + \dots + U_{n,m} \phi_m(x)$. Vi söker sedan koefficienter/hodvärden $U_{n,j}$ sådana att U löser motsvarande diskreta variationsekvationer med u ersatt med U och $v = \phi_i$, $i = 1, \dots, m$, och där vi även medelvärdesbildat i tidsled över det aktuella tidsintervall,

.. P.8/22

Konvektion 7

dvs

$$\int_{\Omega_n} \phi_i c \dot{U} + \int_{\Omega_n} \phi_i \partial_b U + \int_{\Omega_n} \nabla \phi_i \cdot a \nabla U + \int_{\Gamma_n} \phi_i \gamma U \\ = \int_{\Omega_n} \phi_i f + \int_{\Gamma_n} \phi_i g,$$

där $\Omega_n = \Omega \times I_n$ och $\Gamma_n = \Gamma \times I_n$, alternativt

$$\int_{\Omega_n} \phi_i c \dot{U} - \int_{\Omega_n} \nabla \phi_i \cdot U b + \int_{\Omega_n} \nabla \phi_i \cdot a \nabla U + \int_{\Gamma_n} \phi_i \gamma U \\ = \int_{\Omega_n} \phi_i f + \int_{\Gamma_n} \phi_i g,$$

för $i = 1, \dots, m$.

.. p.9/22

Konvektion 9

$$(M + \frac{k}{2}B + \frac{k}{2}A + \frac{k}{2}K) U_n = (M - \frac{k}{2}B - \frac{k}{2}A - \frac{k}{2}K) U_{n-1} \\ + \frac{k}{2}(F_{n-1} + F_n + G_{n-1} + G_n),$$

där $M = M_c$ är massmatrisen, med element $\int_{\Omega} \phi_i c \phi_j$, och B är **konvektionsmatrisen** med element $\int_{\Omega} \phi_i b \cdot \nabla \phi_j$, övriga matriser och vektorer kända sedan tidigare.

Notera att vi här tänkt oss c , a , b och γ oberoende av t och u , och approximerat tidsintegralerna av f och g med trapetskvadratur.

.. p.11/22

Konvektion 8

Som tidigare reduceras detta till ett ekvationssystem med m ekvationer för de m sökta nodvärdena $U_{n,j}$ vid tiden t_n , och kan skrivas på matrisform som

$$M(U_n - U_n) + \frac{k}{2}B(U_{n-1} + U_n) + \frac{k}{2}A(U_{n-1} + U_n) \\ + \frac{k}{2}K(U_{n-1} + U_n) = \frac{k}{2}(F_{n-1} + F_n) + \frac{k}{2}(G_{n-1} + G_n),$$

dvs ..

.. p.10/22

Konvektion 10

Elementen i den nya matrisen B ges alltså av $\int_{\Omega} \phi_i b \cdot \nabla \phi_j$, och beräknas som övriga matriser genom assemblering av elementbidrag $\int_{el} \Phi_I b \cdot \nabla \Phi_J$ vilka i sin tur kan beräknas exakt eller m.h.a. lämplig kvadratur.

.. p.12/22

Konvektion 11

Om vi istället använder den mer allmängiltiga variationsformuleringen, som inte bygger på att b är divergensfritt, erhålls

$$M(U_n - U_n) - \frac{k}{2} B^T(U_{n-1} + U_n) + \frac{k}{2} A(U_{n-1} + U_n) + \frac{k}{2} K(U_{n-1} + U_n) = \frac{k}{2}(F_{n-1} + F_n) + \frac{k}{2}(G_{n-1} + G_n),$$

eftersom matrisen med element $\int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot b \phi_j$ ju uppenbarligen är B 's transponat.

-- p.13/22

Konvektion 13

Konvektionsdominerade problem: Det visar sig att en ny typ av instabilitet kan ge sig till känna för **konvektionsdominerade** problem, dvs där den diffusiva "utjämnande" processen är förhållandevis svag, och följaktligen skarpa **gränsskikt** förekommer.

-- p.15/22

Konvektion 12

Testproblem: Ett tänkbart testproblem för en konvektions-diffusions-lösare skulle kunna vara **titrering** där man i ett cirkulärt kärl med magnetomrörare har en vätska med given rotationshastighet, i vilket tillsätts droppar eller "strilar" av en annan vätska. Ett exempel på ett roterande hastighetsfält är $b = (-x_2, x_1)$, vilket dessutom är divergensfritt. Ett mera verklighetstroget hastighetsfält borde förstås även vara $= 0$ vid randen, men det kanske kan bortses från.

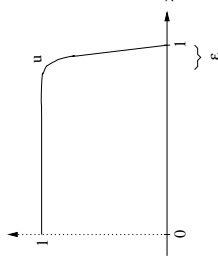
-- p.14/22

Konvektion 14

Ett (något akademiskt) problem där man tydligt kan se denna effekt är följande:

$$u' - \epsilon u'' = 0 \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 0,$$

med exakt lösning $u(x) = c(e^{1/\epsilon} - e^{x/\epsilon})$ där $c = 1/(e^{1/\epsilon} - 1)$ som i figur (notera gränsskiktet nära $x = 1$)



-- p.16/22

Konvektion 15

Med den vanliga ansatsen $U(x) = U_0\phi_0(x) + \dots + U_m\phi_m(x)$, och nodvärden U_i bestämda av

$$\int_0^1 \phi_i U' + \epsilon \phi_i' U' = 0 \quad i = 1, \dots, m,$$

fås

$$\frac{1}{2}(U_{i+1} - U_{i-1}) + \frac{\epsilon}{h}(U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}) = 0,$$

--p.17/22

--p.19/22

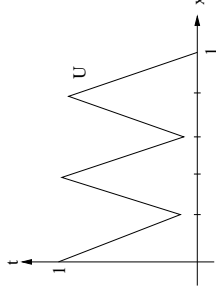
Konvektion 17

Givet in och utflöde: Vid givet in och utflöde, dvs hastighetsfält b sådant att $b \cdot n < 0$ (inflöde) längs del av randen, och $b \cdot n > 0$ (utflöde) längs en annan del blir **randvillkoren** mera problematiska. Vi ett inflöde kan man förstås tänka sig att koncentrationen och det konvektiva flödet är kända, vilket vi bör kunna modellera antingen med stort $\gamma > > 1$ och givet g_D motsvarande den givna koncentrationen/temperaturen i det inkommande flödet, eller med ett givet **flöde** med $\gamma = 0$ och ett g_N motsvarande givet inflöde $u \cdot b \cdot n$.

--p.19/22

Konvektion 16

dvs $U_{i+1} \approx U_{i-1}$ för $\epsilon \ll h$, vilket ger onaturliga oscillationer "uppströms" i lösningen.



Förödande instabilitet av denna typ uppträder inte om alla skarpa gränsskikt löses upp med tillräckligt fint nät, men det kan inte uteslutas att noggrannheten degenererar något.

--p.18/22

--p.20/22

Konvektion 18

I ett **utflöde** kan det vara naturligt att hastighetsfältet b är känt (notera att för **incompressibelt flöde** bör utflödet vara lika stort som inflödet vid given volym), medan koncentrationen/temperaturen inte behöver vara känd. Däremot kan det vara rimligt att anta att **normalderivatan** av koncentrationen/temperaturen, dvs $\partial_n u$ är $= 0$ där, vilket förstås modelleras med $\gamma = 0$ och $g_N = 0$.

--p.20/22

Konvektion 19

Inkompressibelt flöde: Ekvationerna för ett inkompressibelt flöde, med hastighet $u = u(x, t)$ (ovan betecknad b), och tryck p , ges av Navier-Stokes ekvationer

$$\begin{cases} \rho \frac{d}{dt}u = \rho f + \mu \Delta u - \nabla p \\ \nabla \cdot u = 0, \end{cases}$$

där ρ är densiteten, f "yttre" krafter (typ gravitation), och μ **viskositeten**, dvs $\mu \Delta u$ modellerar **viskösa krafter**, och ∇p **tryckkrafter**. Termen $\rho \frac{d}{dt}u$ representerar tröghetskraften, där $\frac{d}{dt}u = \dot{u} + u \cdot \nabla u$ är accelerationen, och den första ekvationen uttrycker alltså kraftbalans enligt Newtons andra lag. Den andra ekvationen är ett uttryck för **masskonservering**.