

Navier-Stokes ekvationer och mikrofluidodynamik

Gästföreläsning i PDE för F2, 2003-05-19

Erik Svensson

Beräkningsmatematik Chalmers

NOTATION

Funktioner: Om inte annat anges förutsätter vi att de funktioner som används beror på rummet och tiden, tex betecknas densiteten med ρ och är generellt en funktion av både rummet och tiden dvs $\rho(x, t)$, där $x \in \mathbf{R}^d$ och där $d = 2, 3$ betecknar dimensionen.

Vektorer: Vi utnyttjar ingen explicit vektornotation, då vi använder vektorer framgår detta av sammanhanget, tex betecknar i allmänhet u, v och f utan index vektorvärda funktioner.

Einsteins summationsprincip: Vi utnyttjar Einsteins summationsprincip dvs,

$$\sum_i u_i v_i = u_i v_i.$$

Partiell integration: Vi förkortar partiell integration med PI, tex för $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx = \{PI\} = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + \int_{\Gamma} u v n_i \, d\Gamma,$$

där $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ är öppen och begränsad, Γ (eller $\partial\Omega$) betecknar randen till Ω och n är normalen ut ur Ω .

INKOMPRESSIBLA NAVIER-STOKES EKVATIONER

Navier-Stokes ekvationer är ett system av partiella differentialekvationer,

- (1) momentekvationen, Newtons andra lag
- (2) kontinuitetsekvationen, masskonservering

Navier-Stokes ekvationer är en generell modell som beskriver fluiders dynamik, tex olika typer av vätskor men också gaser. NS härleddes första gången år 1822 av Claude Navier (senare, år 1845, av George Stoke).

Kontinuitetsekvationen. Låt W vara en godtycklig, fix, volym som utgör en del av fluiden. Vi kan teckna förändringen av massa i denna volym som,

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho \, dx = \int_W \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dx,$$

där ρ betecknar fluidens densitet.

Massflödet ut ur volymen W per areaenhet är $\rho u \cdot n$, där u är fluidens hastighet och n är normalen till ∂W i riktning ut ur W . Ökningen av massa i W är lika med massflödet in i W , dvs,

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho \, dx = - \int_{\partial W} \rho u \cdot n \, d(\partial W).$$

Med Gauss sats kan vi skriva detta som,

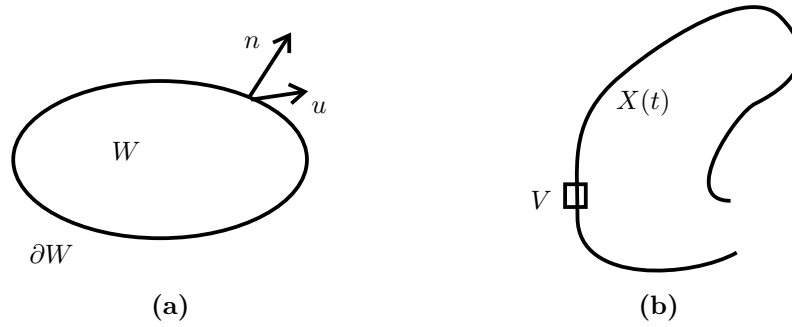
$$\int_W \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) \right) \, dx = 0.$$

Eftersom detta gäller för en godtycklig volym kan vi ekvivalent skriva,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0.$$

Om $\rho = \text{konstant}$ får vi den enklare ekvationen,

$$(1) \quad \nabla \cdot u = 0.$$



FIGUR 1. (a) Flödet ut ur volymen W per areaenhet. (b) Fluidpartikeln V vars trajektoria är $X(t)$.

Momentekvationen. Beteckna med $X(t)$ trajektorian¹ av en mycket liten del av fluiden, V . Vi kallar denna del en fluidpartikel och betraktar den som en partikel. Fluidpartikels hastighet, $u(X(t), t)$, ges av,

$$u(X(t), t) = \frac{dX(t)}{dt},$$

och accelerationen $a(X(t), t)$ ges av (kedjeregeln),

$$\frac{d^2}{dt^2}X(t) = \frac{d}{dt}u(X(t), t) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_i}u_i = \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u.$$

Det är brukligt att skriva detta som,

$$(2) \quad \frac{d^2}{dt^2}X(t) = \frac{Du}{Dt} \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u,$$

där D/Dt är den så kallade massderivatan.

På fluidpartikeln verkar ett antal olika slags krafter; tryck, viskösa krafter (eller inre friktion) och volymskrafter tex gravitation. Trycket, p , verkar på fluidpartikels yta i normalriktningen. De viskösa krafterna som betecknas med $d \times d$ matrisen σ verkar också på fluidpartikels yta men nu både i normal och tangenriktningen. Matrisen σ kallas spänningstensorn och måste vara en matris för att kunna representera krafter som verkar i alla d riktningar. Dessa krafter uppstår på grund av att atomer med olika kinetisk energi rör sig (diffunderar) in och ut ur fluidpartikeln, man kan tänka sig detta som friktion mellan olika fluidpartiklar då de rör sig med olika hastigheter. Volymskraften, f , är en kraft per massenhet dvs verkar i hela fluidpartikels volym. Vi summerar krafterna som verkar på fluidpartikeln och får med hjälp av Gauss sats,

$$\int_{\partial V} (-pn + \sigma \cdot n) d(\partial V) + \int_V \rho f dx = \int_V (-\nabla p + \nabla \cdot \sigma) + \rho f dx.$$

Ett annat sätt att uttrycka detta på är att kraften som verkar på vätskan per volymsenhet är (tag integranden i uttrycket ovan),

$$(3) \quad -\nabla p + \nabla \cdot \sigma + \rho f.$$

Newtons andra lag per volymsenhet i vätskan blir nu med ekv (2) och ekv (3),

$$(4) \quad \rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \sigma + \rho f.$$

Det återstår att finna ett uttryck för spänningstensorn σ . De viskösa krafterna uppstår då fluidpartiklar rör sig med olika hastighet. Krafterna måste därmed bero på rumsderivatorna av hastighetsfältet. I allmänhet antas hastighetsgradienterna vara små och ett approximativt linjärt samband mellan spänningstensorn och förstaderivatorna förutsätts gälla dvs, $\sigma_{ij} \propto \partial u_i / \partial x_j$.

¹Detta är den så kallade Lagrangska framställningen (eller koordinater), vi följer med en partikel i flödet. I den så kallade Euler framställningen (eller koordinater), som vi i huvudsak kommer att använda oss av, betraktas flödet punktvis.

Notera att σ blir noll för $u = \text{konstant}$ (enl vårt resonemang) och att σ måste bara bero på förstaderivatorna, inga bidrag från konstanter. Slutligen måste σ försvinna då fluiden rotera med konstant vinkelhastighet, ω . Det visar sig att linjärkombinationen $\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i$ blir noll då hastigheten är $u = \omega \times r$ och därmed måste σ innehålla sådana linjärkombinationer. Vi har alltså kommit fram till att spänningstensorn kan skrivas på formen,

$$\sigma_{ij} = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

där η är den så kallade viskositeten. Vi får med detta att den viskösa termen i ekv (4) kan skrivas som (antag att $\eta = \text{konstant}$),

$$\nabla \cdot \sigma = \eta \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \eta \Delta u.$$

Momentekvationen blir nu slutligen,

$$(5) \quad \rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla p + \eta \Delta u + \rho f.$$

Kontinuumshypotesen. Resonemangen ovan bygger på att vi kan betrakta fluiden som ett kontinuum. Detta förutsätter att storleken av fluiden vi betraktar är sådan att storleken på fluidens beståndsdelar, atomer/molekyler är mycket mindre än storleken på hela fluiden. Detta är den så kallade kontinuumshypotesen.

RANDVÄRDESPROBLEM OCH NAVIER-STOKES EKVATIONER

I domänen $\Omega(t) \subset \mathbf{R}^d$, och $I = [0, T]$ ges NS av, ekv (1) och ekv (5) (vi antar att ρ och η är konstanter),

$$(6) \quad \begin{aligned} u_t + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \frac{1}{\rho} \nabla p &= f, & x \in \Omega(t), t \in I, \\ \nabla \cdot u &= 0, & x \in \Omega(t), t \in I, \\ u &= u_0, & x \in \Omega(t), t = 0, \\ u &= g, & x \in \Gamma, t \in I, \end{aligned}$$

där $\Gamma \equiv \partial\Omega$ är randen till Ω , $\nu = \eta/\rho$ är den kinematiska viskositeten, u_0 är begynnelsedata och g är hastigheten på randen, no-slip randvillkor dvs fluiden vid randen skall ha samma hastighet som randen.

APPROXIMATIONER TILL NAVIER-STOKES

Stokes ekvationer.

$$\begin{aligned} -\nu \Delta u + \nabla p &= f, & x \in \Omega(t), \\ \nabla \cdot u &= 0, & x \in \Omega(t). \end{aligned}$$

Potentialflöden.

$$-\nu \Delta u = f, \quad x \in \Omega(t).$$

Andra modeller. Navier-Stokes och Stokes ekvationer är så kallade kontinuumsmoeller. I kontrast till dessa finns det partikelmodeller som beskriver hur partiklar (atomer, molekyler) interagerar på mikroskopisk nivå. Boltzmannekvationen är ett exempel på en partikel baserade modellekvationer.

NAVIER-STOKES I DIMENSIONSLÖS FORM

Introducera en karakteristisk längd, L , och en karakteristisk hastighet, U (ger en tid, $T = L/U$), valet av L och U kan vara baserat på något form av medelvärde. Skala om NS enl,

$$x'_i = x_i/L, \quad u'_i = u_i/U, \quad t' = t/T, \quad p' = p/(\rho U^2).$$

Utförlig kalkyl, utnyttja kedjeregeln, term för term, steg för steg i ekv (6),

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= U \frac{\partial u'}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{U}{T} \frac{\partial u'}{\partial t'}, \\ (u \cdot \nabla)u &= u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = U^2 u'_i \frac{\partial u'}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial x_i} = \frac{U^2}{L} u'_i \frac{\partial u'}{\partial x'_i} = \frac{U^2}{L} (u' \cdot \nabla')u', \\ \nabla p &= \rho U^2 \frac{\partial p'}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial x_i} = \frac{\rho U^2}{L} \frac{\partial p'}{\partial x'_i} = \frac{\rho U^2}{L} \nabla' p', \\ \Delta u &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} = U \frac{\partial}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial x_i} \frac{\partial u'}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial x_i} = \frac{U}{L^2} \frac{\partial}{\partial x'_i} \frac{\partial u'}{\partial x'_i} = \frac{U}{L^2} \Delta' u'. \end{aligned}$$

Detta ger, (för enkelhets skull har vi tagit bort primentecknen),

$$(7) \quad \begin{aligned} u_t + (u \cdot \nabla)u - \frac{1}{Re} \Delta u + \nabla p &= f, & x \in \Omega(t), t \in I, \\ \nabla \cdot u &= 0, & x \in \Omega(t), t \in I, \end{aligned}$$

där $Re = LU/\nu$ är det så kallade Reynoldstalet.

LAMINÄRA OCH TURBULENTA FLÖDEN

Lösningarna till NS ekvationer kan se mycket olika ut beroende på storleken av Re .

Stora Reynoldstal, $Re \gtrsim 100$: Turbulenta flöden, oregelbundna, kaotisk, 'stokastiska' -lösningar.

Små Reynoldstal, $Re \lesssim 1$: Laminära flöden, regelbundna lösningar.

EXISTENS OCH ENTYDIGHET?

Stokes ekvationer: Existerar en entydigt bestämd lösning.

Navier Stokes ekvationer: Svårt att ge ett enkelt svar -finns inget enkelt svar.

se www.claymath.org/Millennium_Price_Problems/ (1 miljon dollar står på spel!)

RANDVÄRDESPROBLEM FÖR TRYCKET

Trycket bestäms av hastighetsfältet. För att se detta tag divergensen på momentekvationen i NS.

Utförlig kalkyl, term för term, steg för steg,

$$(8) \quad \begin{aligned} \nabla \cdot u_t &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot u = \{\nabla \cdot u = 0\} = 0, \\ \nabla \cdot \Delta u &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \nabla \cdot u = 0, \\ \nabla \cdot \nabla p &= \Delta p, \\ \nabla \cdot \{(u \cdot \nabla)u\} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Moment ekvationen blir nu,

$$(9) \quad \Delta p = \nabla \cdot f - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

För no-slip fallet (antag att $g = 0$) kan vi härleda randvillkor genom att skalärt multiplicera momentekvationen i NS med normalen till randen.

$$\begin{aligned} u_t \cdot n &= \frac{\partial}{\partial t}(u \cdot n) = 0, \\ \nabla p \cdot n &= \frac{\partial p}{\partial n}, \\ \{(u \cdot \nabla)u\} \cdot n &= u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} n_i = 0. \end{aligned}$$

Vi får,

$$(10) \quad \frac{\partial p}{\partial n} = \{f + \nu \Delta u\} \cdot n.$$

Ekv (9) och (10) är ett randvärdesproblem för trycket, Neuman randvillkor.

SVAG FORMULERING AV NAVIER-STOKES

Vi antar att $g = 0$ i ekv (6) och inför ett antal funktionsrum. För funktioner $q, v : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, d$,

$$(11) \quad \begin{aligned} L^2(\Omega) &= \{q : \int_{\Omega} q^2 dx < \infty\}, \\ L_0^2(\Omega) &= \{q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q dx = 0\}, \\ H^1(\Omega) &= \{v : \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + v^2) dx < \infty\}, \\ H_0^1(\Omega) &= \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma} = 0\}. \end{aligned}$$

$L_0^2(\Omega)$ kommer att användas till trycket. Trycket i NS är bestämt sånär som på en konstant (om p är en lösning för trycket så är också $p+c$ där c är en konstant också en lösning). Villkoret att $\int_{\Omega} q dx = 0$ gör så att trycket blir entydigt bestämt. $H_0^1(\Omega)$ kommer att användas för hastighetsfältet.

För $u \in H_0^1(\Omega)$ och $p \in L_0^2(\Omega)$ multiplicerar vi momentekvationen in ekv (6) med $v \in H_0^1(\Omega)$ och kontinuitetsekvationen med $q \in L_0^2(\Omega)$ samt integrerar över Ω . Kalkyl term för term, steg för steg,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot v dx &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u \cdot v dx, \\ - \int_{\Omega} \Delta u \cdot v dx &= \{\text{PI}\} = - \int_{\Gamma} \frac{\partial u_i}{\partial n} v_i d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx \quad \text{ty } v|_{\Gamma} = 0, \\ \int_{\Omega} \nabla p \cdot v dx &= \{\text{PI}\} = \int_{\Gamma} p v \cdot n d\Gamma - \int_{\Omega} p \nabla \cdot v dx \\ &= - \int_{\Omega} p \nabla \cdot v dx. \end{aligned}$$

Den svaga formuleringen blir.

Finn $(u, p) \in (H_0^1(\Omega))^d \times L_0^2(\Omega)$ sådana att,

$$(12) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u \cdot v dx + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} v_j dx + \int_{\Omega} p \nabla \cdot v dx &= \int_{\Omega} f \cdot v dx, \\ \int_{\Omega} q \nabla \cdot u dx &= 0, \end{aligned}$$

för alla $(v, q) \in (H_0^1(\Omega))^d \times L_0^2(\Omega)$.

Inför en kompaktare notation,

$$\begin{aligned}(u, v) &= \int_{\Omega} u \cdot v \, dx, \\ a(u, v) &= \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx, \\ b(p, v) &= - \int_{\Omega} p \nabla \cdot v \, dx, \\ c(u, u, v) &= \int_{\Omega} u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} v_j \, dx.\end{aligned}$$

Med denna notation blir ekv (12). Finn $(u, p) \in (H_0^1(\Omega))^d \times L_0^2(\Omega)$ sådana att,

$$(13) \quad \begin{aligned}\frac{d}{dt}(u, v) + \frac{1}{Re}a(u, v) + c(u, u, v) + b(p, v) &= (f, v), \\ b(q, u) &= 0,\end{aligned}$$

för alla $(v, q) \in (H_0^1(\Omega))^d \times L_0^2(\Omega)$.

FINIT ELEMENT FORMULERING AV STATIONÄRA NAVIER-STOKES

Vi betraktar nu stationära Navier Stokes ekvationer dvs då $\partial u / \partial t = 0$. Ersätter de oändligtdimensionella funktionsrummen ekv (11) med ändligtdimensionella approximationer. För $n \geq 1$, inför,

$$\begin{aligned}X_h(\Omega) &= \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega) : v_h|_K \in P_{n+1} \forall K \in \tau_h\}, \\ M_h(\Omega) &= \{q_h \in C^0(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) : q_h|_K \in P_n \forall K \in \tau_h\},\end{aligned}$$

där P_n betecknar polynom av grad n och τ_h är en triangulering (se kursboken, CDE). Det är väsentligt av stabilitetsskäl, något vi inte går in på, att gradtalet på polynomen i X_h är en ordning högre än på polynomen i M_h . Denna konstruktion ger de så kallade Taylor-Hood finit elementen.

Vi ersätter $H_0^1(\Omega)$ och $L_0^2(\Omega)$ i den svaga formuleringen ekv (12) med $X_h(\Omega)$ och $M_h(\Omega)$ och skapar därmed en approximation till ekv (12). Detta brukar kallas Ritz-Galerkin metod och vi får.

Finn $(u_h, p_h) \in (X_h(\Omega))^d \times M_h(\Omega)$ sådana att $(f_h \in X_h(\Omega))$,

$$(14) \quad \begin{aligned}\frac{1}{Re}a(u_h, v) + c(u_h, u_h, v) + b(p_h, v) &= (f_h, v), \\ b(q, u_h) &= 0,\end{aligned}$$

för alla $(v, q) \in (X_h(\Omega))^d \times M_h(\Omega)$.

Antag att $\{\phi_1, \dots, \phi_M\}$ är en bas för $X_h(\Omega)$ och $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ är en bas för $M_h(\Omega)$. Vi kan då skriva,

$$(15) \quad u_h = u_i \phi_i, \quad p_h = p_j \varphi_j,$$

där u_i ($i = 1, \dots, M$) och p_j ($j = 1, \dots, N$) är konstanter. Vi bestämmer dessa konstanter genom att i ekv (14) substituera uttrycken för u_h och p_h från ekv (15) samt genom att uttrycka v och q i dess baser. Vi får,

$$\begin{aligned}\frac{1}{Re}a(\phi_i, \phi_k)u_i + c(\phi_i, \phi_i, \phi_k)u_i^2 + b(\varphi_j, \phi_k)p_j &= (\phi_i, \phi_k)f_i, \\ b(\varphi_\ell, \phi_i)u_i &= 0,\end{aligned}$$

för $k = 1, \dots, M$ och $\ell = 1, \dots, N$.

Ett problem med formuleringen ovan är den icke linjära termen $c(\phi_i, \phi_i, \phi_k)u_i^2$. Vanligtvis hanteras detta genom att linjarisera problemet och lösa problemet med ett iterativt förfarande, tex,

- (1) Starta med en gissning för hastighetsfältet u^0 .

(2) Lös för $n = 1, \dots$, tills felet är litet nog.

$$(16) \quad \frac{1}{Re} a(\phi_i, \phi_k) u_i^n + c(\phi_i, \phi_i, \phi_k) u_i^n u_i^{n-1} + b(\varphi_j, \phi_k) p_j^n = (\phi_i, \phi_k) f_i, \\ b(\varphi_\ell, \phi_i) u_i^n = 0.$$

Det går att via att detta förfarande konvergera mot en lösning.

LINJÄRA EKVATIONSSYSTEM

Notera att ekv (16) är ett linjärt ekvationssystem. Det är brukligt att skriva detta på blockmatrisform. Med,

$$(17) \quad A = \frac{1}{Re} a(\phi_i, \phi_k), \\ C = c(\phi_i, \phi_i, \phi_k) u_i^{n-1}, \\ B = b(\varphi_\ell, \phi_i), \\ F = (\phi_i, \phi_k) f_i.$$

Detta ger,

$$(18) \quad \begin{pmatrix} A + C & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^n \\ p^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Antalet operationer som krävs för att lösa linjära ekvationssystem med Gausselimination skalar som N^3 där N är antalet nollskilda element i matrisen. För stora matriser, vanligt för PDE problem, krävs andra metoder. Att på ett effektivt vis approximativt lösa stora linjära ekvationssystem är ett vitalt forskningsområde som utvecklas i takt med att datorer blir bättre och bättre.

MIKROFLUIDDYNAMIK

För mikrofluider, små volymer eller fluider begränsade till små utrymmen tex strömning i små rör, skiljer sig modelleringen från den vi känner för makroskopiska fluider. Några av skillnaderna är,

Små Reynolds tal: Typiskt är $Re \lesssim 1$ eller $Re \ll 1$ och flödena är alltid laminära.

Effekter från ytor: Vägg- och andra gränsskikt kommer att påverka flödesbilden i större grad. Nya randvillkor kan behövas, tex är no-slip randvillkoret inte alltid motiverat.

Icke kontinuumseffekter: Mikroflöden är mer gryniga i karaktären, kontinuumshypotesen kan upphöra att gälla tex för kolloidala lösningar eller för gasflöden.

Mikrofluiddynamiska modeller måste mer i detaljerad ta hänsyn till underliggande fysikaliska mekanismer, tex olika slags växelverkan; partikel/partikel och partikel/fluid (för kolloidala lösningar eller andra typer av lösningar som är icke homogena i sin sammansättning). En väsentlig del är modellering av olika slags gränsskikt tex mellan fluid och fasta ytor, detta kommer att påverka randvillkoren och därmed hela modellen. Utveckling av mikrofluiddynamiska modeller är ett multidisciplinärt forskningsområde där beräkningsmatematiker, fysiker och kemister med fördel samarbetar.

MIKRO FLUIDDYNAMIK -ETT HETT FORSKNINGSSOMRÅDE

Direkt simulering av kolloidala lösningar. Kolloidala lösningar är ett exempel på komplicerade fluider där vätska och fasta kroppar/makromolekyler växelverkar. Detta får bla till följd att vi inte kan approximera viskositeten som konstant (och densiteten) -vätskan blir icke Newtonsk. Kolloidala lösningar går att modellera genom att formulera ett randvärdesproblem med dynamisk rand. Man löser NS ekvationer i vätskan mellan partiklarna och partiklarna translateras (roterar) genom Newtons andra lag.

- R. Glowinski *et al.*, *A fictitious domain approach to the direct numerical simulation of incompressible viscous flow past moving rigid bodies: application to particulate flow*, J. Comput. Phys. **169** (2001), 363–426.

Lab on the chip. Det är nu mera populärt att skala ner storleken på allahanda kemiska experiment, analyser etc, till mikroskala. Drömmen är att skapa så kallade 'lab on the chip' hela analyser (tex analyser av DNA och proteiner med också kliniska tester av tex blod mm) sker på ett litet kisel eller plast chip. Tekniken liknar i många hänseenden vad vi känner till från mikroelektroniken, den integrerade kretsen. Det är mycket små fluidsysteM som skapas och nya modeller och simuleringsverktyg måste utvecklas för att beskriva dessa system.

- S. Quake *et al.*, *Microfluidic Large-Scale Integration*, *Science* **298** (2002), 580–584.

Kaotisk blandning i mikro system. Mikroflöden är laminära och det kan vara svårt att tex bland två mikrofluider. Vid design av mikrofluidsystem måste denna aspekt noggrant tas hänsyn till.

- G. Whitesides *et al.*, *Chaotic Mixer for Microchannels*, *Science* **295** (2002), 647–651.

Nano strålar. Genomgående för mikrofluidmodeller är att vi av beräkningstekniska begränsningar inte kan ta hänsyn till fysikaliska mekanismer in i minsta detalj. Ett alternativ kan vara att modellera dessa effekter stokastiskt.

- U. Landman *et al.*, *Formation, Stability and Breakup of Nanojets*, *Science* **289** (2000), 1165–1169.