

Varje uppgift ger maximalt 10 p. För godkänt erfordras 25p. Dina lösningar skall vara välskrivna och lätta att följa.

Hjälpmedel: Beta, räknedosa ej tillåten.

Telefonvakt: Niklas Broberg 0740-459022.

1. Betrakta det linjära homogena begynnelsevärdesproblemet

$$x''(t) - 2x'(t) - 8x(t) = 0, \quad (1)$$

med $x(0) = 4$ och $x'(0) = 1$.

- Skriv (1) som ett system av första ordningens ekvationer och bestäm koeficientmatrisen A .
- Bestäm egenvärden och egenvektorer till A .
- Bestäm lösningen till systemet i a).
- Skissa fasporträttet till lösningen.
- Avgör lösningens stabilitet.

2. a) Beskriv Eulers metod för numerisk lösning av differentialekvationer.

b) Av vilken storleksordning är felet vid Eulers metod?

c) Låt $f(n) = (1 + 1/n)^n$. Visa att för $n = 1, 2, \dots$ så gäller att

$$|f(n+1) - f(n)| < \frac{3}{n}.$$

Ledning: Logaritmera och utnyttja att $0 < \ln(1+x) < x$ för $x > 0$.

d) Redogör med hjälp av t.ex Eulers metod och resultatet i c) hur man kan använda $f(n)$ som en approximation till e .

e) Beräkna ett närmevärde till e med Euler's metod med startvärde 1 och steglängd $h = 1/4$.

3. En tank innehåller 100 liter saltvattenslösning med 1 kg salt. Vid tiden $t=0$ hålls en saltlösning med 0.2 kg salt/liter ned i tanken med flödes hastigheten 1 liter/min. Den välblandade lösningen lämnar tanken med samma flödes hastighet.

a) Bestäm mängden salt i tanken vid tiden t .

- b) Bestäm den tidpunkt vid vilken tanken innehåller 2 kg salt.
c) Skissa grafen av saltmängden som en funktion av tiden t .

4. Betrakta värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < L, t > 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \\ u(x, 0) = x, & 0 < x < L/2, \\ u(x, 0) = L - x, & L/2 < x < L. \end{cases}$$

Bestäm $u = u(x, t)$.

5. Betrakta Laplace's ekvation

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

i halvplanet $-\infty < x < \infty, y > 0$. Antag att $u(x, t)$ är begränsad då $y \rightarrow \infty$ och att $u(x, 0) = 1$ då $|x| < 1$ och $u(x, 0) = 0$ för övrigt. Bestäm $u(x, t)$.