Matematik Chalmers

Övningstentamen i TMV040 Tillämpad matematik K, 2003–05–03

Telefon: Stig Larsson, 0740–459022
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten. Tabell för Laplacetransform från kompendiet delas ut på tentamen.

Betygsgränser: 20–29 poäng 3, 30–39 poäng 4, 40–50 poäng 5.

1. (10 p) Funktionen f är periodisk med period 6 och $f(t) = 1$ för $|t| \leq 1$, $f(t) = 0$ för $1 < |t| \leq 3$. Rita dess graf och bestäm dess Fourierserie. Rita amplitudspektrum (de första 7 termerna räcker).

2. (10 p) En rak jämntjock stav utan inre värmekällor har isolerad mantelyta. Temperaturen vid $t = 0$ är 1. För $t > 0$ hålls begränsningsytorna vid $x = 0$ och $x = 1$ vid temperaturen 0.

(a) Ge differentialekvation, randvillkor och begynnelsevillkor för beräkninga av temperaturen $u(x,t)$.

(b) Beräkna $u(x,t)$ med hjälp av variabelseparationsmetoden (Fouriers metod).

3. (15 p) Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} &u''(t) - u(t) = 0 \\ &u(0) = u_0, \ u'(0) = u_1. \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Lös (1) med hjälp av metoden med karakteristisk ekvation.

(b) Lös (1) med hjälp av metoden med Laplacetransform.

(c) Skriv (1) som ett system av ODE av första ordningen. Lös detta med hjälp av egenvektormetoden.

(d) Beskriv hur man löser detta system med hjälp av Matlab.

(e) Diskutera systemets stabilitet. Rita fasporträtt.

4. (15 p) Balansekvationerna för massa Vc `[mol]` och värmeenergi $\rho c_p VT$ `[J]` för en tankreaktor är

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Vc) &= q(c_f - c) - Vck_0 \exp(-E/(RT)), \\ \frac{d}{dt}(\rho c_p VT) &= \rho c_p q(T_f - T) + (-\Delta H)Vck_0 \exp(-E/(RT)) - \kappa A(T - T_K). \end{aligned} \tag{2}$$

(a) Inför nya variabler $X_1 = (c_f - c)/c_f$ (omsättningsgraden), $X_2 = (T - T_f)/T_f$, $U_1 = q/q_f$, $U_2 = (T_K - T_f)/T_f$, där c_f, T_f, q_f är (lämpligt valda) konstanter. Visa hur systemet (2) kan skrivas på dimensionslös form

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{ds} &= -U_1X_1 + (1 - X_1)f(X_2), \\ \frac{dX_2}{ds} &= -U_1X_2 + \alpha(1 - X_1)f(X_2) - \beta(X_2 - U_2), \end{aligned}$$

där $f(X_2) = \delta \exp(\gamma X_2/(1 + X_2))$, $\gamma = E/(RT_f)$. Vad är α, β, δ?

(b) Antag att vi har bestämt ett jämviktsläge $\bar{X}, \bar{U}$. Linjärisera kring $\bar{X}, \bar{U}$. Skriv ned det linjäriserade systemet.

(c) Hur kan man bestämma stabiliteten hos jämviktsläget $\bar{X}, \bar{U}$?

`/stig`