

1.

$$\begin{aligned}
 T &= 6, \quad \Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{3} \\
 a_n &= 0, \quad \text{ty } f \text{ är udda} \\
 b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\Omega t \, dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\Omega t \, dt = \frac{2}{3} \int_0^3 f(t) \cos \frac{n\pi t}{3} \, dt \\
 &= \frac{2}{3} \int_0^1 \sin \frac{n\pi t}{3} \, dt = \frac{2}{3} \left[ -\cos \frac{n\pi t}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{n\pi} \left( 1 - \cos \frac{n\pi}{3} \right) \\
 f(t) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left( 1 - \cos \frac{n\pi}{3} \right) \sin \frac{n\pi t}{3} \\
 &= \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi t}{3} + \frac{3}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{3} + \frac{4}{3\pi} \sin \frac{3\pi t}{3} + \frac{3}{4\pi} \sin \frac{4\pi t}{3} \\
 &\quad + \frac{1}{5\pi} \sin \frac{5\pi t}{3} + 0 + \frac{1}{7\pi} \sin \frac{7\pi t}{3} + \dots
 \end{aligned}$$

Amplituderna är:  $A_0 = \frac{1}{2}a_0 = 0$ ,  $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = b_n$ , eftersom  $b_n \geq 0$ . Alltså:

$$A_0 = 0, \quad A_1 = \frac{1}{\pi}, \quad A_2 = \frac{3}{2\pi}, \quad A_3 = \frac{4}{3\pi}, \quad A_4 = \frac{3}{4\pi}, \quad A_5 = \frac{1}{5\pi}, \quad A_6 = 0, \quad A_7 = \frac{1}{7\pi}.$$

2.

$$\begin{aligned}
 \text{(DE)} \quad & \frac{1}{\kappa} u'_t = u''_{xx} \\
 \text{(RV)} \quad & u(0, t) = u(1, t) = 0 \\
 \text{(BV)} \quad & u(x, 0) = 1
 \end{aligned}$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left( 1 - (-1)^n \right) \exp(-n^2 \pi^2 \kappa t) \sin(n\pi x)$$

3. (a) Den karakteristiska ekvationen är  $r^2 + r - 2u = 0$  med rötterna  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = -2$ . Den allmänna lösningen blir

$$\begin{aligned}
 u(t) &= Ae^t + Be^{-2t} \\
 u'(t) &= Ae^{-t} - 2Be^{-2t}.
 \end{aligned}$$

Begynnelsevillkoren ger

$$\begin{aligned}
 u_0 &= u(0) = A + B, \\
 u_1 &= u'(0) = A - 2B,
 \end{aligned}$$

dvs  $A = (2u_0 + u_1)/3$ ,  $B = (u_0 - u_1)/3$ . Alltså:

$$u(t) = \frac{1}{3}(2u_0 + u_1)e^{-t} + \frac{1}{3}(u_0 - u_1)e^{-2t}.$$

(b) Laplacetransformering ger

$$(s^2 U(s) - s u_0 - u_1) + (s U(s) - u_0) - 2U(s) = 0,$$

dvs

$$U(s) = \frac{(s+1)u_0 + u_1}{s^2 + s - 2}.$$

Med partialbråksuppdelning får vi

$$U(s) = \frac{(s+1)u_0 + u_1}{(s-1)(s+2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} = \frac{As + 2A + Bs - B}{(s-1)(s+2)}$$

Identifiering av koefficienterna ger  $(s+1)u_0 + u_1 = As + 2A + Bs - B$ , dvs  $A = (2u_0 + u_1)/3$ ,  $B = (u_0 - u_1)/3$ . Alltså:

$$U(s) = \frac{1}{3}(2u_0 + u_1)\frac{1}{s-1} + \frac{1}{3}(u_0 - u_1)\frac{1}{s+2} \supset \frac{1}{3}(2u_0 + u_1)e^t + \frac{1}{3}(u_0 - u_1)e^{-2t} = u(t).$$

(c) Med  $x_1 = u$ ,  $x_2 = u'$  får vi

$$\begin{aligned} x_1' &= u' = x_2, \\ x_2' &= u'' = 2x_1 - x_2, \end{aligned}$$

dvs, på matrisform,

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad x(0) = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}.$$

(d) Man skriver en m-fil kallad **funk.m**:

```
function xprime=funk(t,x)
xprime=[0 1; 2 -1]*x;
```

sedan exekverar man matlabkommandona

```
>> u0=1; u1=2; x0=[u0; u1]; T=5;
>> [t,x]=ode45('funk',[0;T],x0);
```

(e) Det linjära systemet har egenvärdena 1 och  $-2$ , dvs ett är positivt och ett är negativt. Det betyder att systemet är instabilt.

4. Den första ekvationen divideras med  $q_f c_f$ , den andra med  $\rho c_p q_f T_f$ . Med  $\tau = V/q_f$  får vi

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{dt} \left( \frac{c}{c_f} \right) &= \frac{q}{q_f} \frac{c_f - c}{c_f} - \frac{c}{c_f} \tau k_0 \exp \left( -\frac{E}{RT_f} \frac{T_f}{T} \right), \\ \tau \frac{d}{dt} \left( \frac{T}{T_f} \right) &= \frac{q}{q_f} \frac{T_f - T}{T_f} + \frac{(-\Delta H)c_f}{\rho c_p T_f} \frac{c}{c_f} \tau k_0 \exp \left( -\frac{E}{RT_f} \frac{T_f}{T} \right) - \frac{\kappa A \tau}{\rho c_p V} \left( \frac{T - T_f}{T_f} - \frac{T_K - T_f}{T_f} \right). \end{aligned}$$

Med de dimensionslösa variablerna

$$\begin{aligned} s &= t/\tau, \\ X_1(s) &= \frac{c(s\tau)}{c_f}, \quad X_2(s) = \frac{T(s\tau)}{T_f}, \\ U_1(s) &= \frac{q(s\tau)}{q_f}, \quad U_2(s) = \frac{T_K(s\tau)}{T_f}, \\ \alpha &= \frac{(-\Delta H)c_f}{\rho c_p T_f}, \quad \beta = \frac{\kappa A \tau}{\rho c_p V}, \quad \gamma = \frac{E}{RT_f}, \quad \delta = \tau k_0 e^{-\gamma}, \quad f(X_2) = \delta \exp(\gamma - \gamma/X_2), \end{aligned}$$

får vi

$$\begin{aligned} \frac{c}{c_f} &= X_1, \quad \frac{T}{T_f} = X_2, \quad \tau \frac{d}{dt} \left( \frac{c}{c_f} \right) = \frac{dX_1}{ds}, \quad \tau \frac{d}{dt} \left( \frac{T}{T_f} \right) = \frac{dX_2}{ds}, \\ \tau k_0 \exp \left( -\frac{E}{RT_f} \frac{T_f}{T} \right) &= \tau k_0 \exp \left( -\frac{E}{RT_f} \right) \exp \left( \frac{E}{RT_f} - \frac{E}{RT_f} \frac{T_f}{T} \right) \\ &= \delta \exp \left( \gamma - \frac{\gamma}{X_2} \right) = f(X_2). \end{aligned}$$

Detta leder till det icke-linjära differentialekvationssystemet

$$\begin{aligned}\frac{dX_1}{ds} &= U_1(1 - X_1) - X_1 f(X_2) && (= F_1(X, U)), \\ \frac{dX_2}{ds} &= U_1(1 - X_2) + \alpha X_1 f(X_2) - \beta(X_2 - U_2) && (= F_2(X, U)).\end{aligned}$$

(b) Stationära punkter ges av

$$\begin{aligned}0 &= \bar{U}_1(1 - \bar{X}_1) - \bar{X}_1 f(\bar{X}_2), \\ 0 &= \bar{U}_1(1 - \bar{X}_2) + \alpha \bar{X}_1 f(\bar{X}_2) - \beta(\bar{X}_2 - \bar{U}_2).\end{aligned}$$

Vi löser ut styrvariablerna

$$\begin{aligned}\bar{U}_1 &= \frac{\bar{X}_1}{1 - \bar{X}_1} f(\bar{X}_2), \\ \bar{U}_2 &= \bar{X}_2 - \frac{1}{\beta} \left( \frac{\bar{X}_1}{1 - \bar{X}_1} (1 - \bar{X}_2) f(\bar{X}_2) + \alpha \bar{X}_1 f(\bar{X}_2) \right).\end{aligned}$$

Med  $\alpha = 0.3$ ,  $\gamma = 30$ ,  $\delta = 0.1$  och  $\bar{X}_1 = 0.5$ ,  $\bar{X}_2 = 1$  får vi  $f(1) = 0.1$  och  $f'(1) = 3$ ,  $\alpha f(1) = 0.03 \approx 0$ . Dvs

$$\begin{aligned}\bar{U}_1 &= 0.1, \\ \bar{U}_2 &= 1 - \frac{0.015}{\beta}.\end{aligned}$$

(c) Nu linjäriserar vi kring  $\bar{X}, \bar{U}$ . Det linjäriserade systemet blir

$$x'(s) = Ax(s) + Bu(s), \quad s > 0; \quad x(0) = x_0,$$

med Jacobimatrisererna

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1}(\bar{X}, \bar{U}) & \frac{\partial F_1}{\partial X_2}(\bar{X}, \bar{U}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_1}(\bar{X}, \bar{U}) & \frac{\partial F_2}{\partial X_2}(\bar{X}, \bar{U}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{U}_1 - f(\bar{X}_2) & -\bar{X}_1 f'(\bar{X}_2) \\ \alpha f(\bar{X}_2) & -\bar{U}_1 + \alpha \bar{X}_1 f'(\bar{X}_2) - \beta \end{bmatrix},$$

där  $f'(\bar{X}_2) = \frac{\gamma}{\bar{X}_2^2} f(\bar{X}_2)$ , och

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial U_1}(\bar{X}, \bar{U}) & \frac{\partial F_1}{\partial U_2}(\bar{X}, \bar{U}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial U_1}(\bar{X}, \bar{U}) & \frac{\partial F_2}{\partial U_2}(\bar{X}, \bar{U}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \bar{X}_1 & 0 \\ 1 - \bar{X}_2 & \beta \end{bmatrix}.$$

Vi sätter in siffervärden i  $A$ ,

$$A = \begin{bmatrix} -0.2 & -1.5 \\ 0.03 & 0.35 - \beta \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.2 & -1.5 \\ 0 & 0.35 - \beta \end{bmatrix}$$

Den sista matrisen har egenvärdena  $\lambda_1 = -0.2$  och  $\lambda_2 = 0.35 - \beta$ . De är båda negativa, och det linjäriserade systemet asymptotiskt stabilt, om  $\beta > 0.35$ . Det betyder fysikaliskt att kylarens area måste vara tillräckligt stor, större än  $0.35 \rho c_p q_f / \kappa$ .

/stig