TMV040 Tillämpad matematik K, 2004–01–15. Lösningar.

1.

$$
\begin{aligned}
&T = 2\pi,\ \Omega = \frac{2\pi}{T} = 1 \\
&a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\Omega t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(t)\cos(nt)\,dt \\
&\quad = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\Big(\sin((1-n)t)+\sin(1+n)t)\Big)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos((1-n)t)}{1-n}-\frac{\cos((1+n)t)}{1+n}\right]_0^{\pi} \\
&\quad = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos((n-1)t)}{n-1}-\frac{\cos((n+1)t)}{n+1}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos((n-1)\pi)-1}{n-1}-\frac{\cos((n+1)\pi)-1}{n+1}\right) \\
&\quad = \begin{cases} 0 & \text{för } n = 2k+1 \text{ (udda)}, \\ \frac{2}{\pi}\frac{-1}{(2k+1)(2k-1)} & \text{för } n = 2k \text{ (jämnt)}, \end{cases} \\
&\text{speciellt: } a_0 = \frac{2}{\pi}. \\
&b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\Omega t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(t)\sin(nt)\,dt \\
&\quad = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\Big(\cos((n-1)t)-\cos(n+1)t)\Big)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin((n-1)t)}{n-1}-\frac{\sin((n+1)t)}{n+1}\right]_0^{\pi} \\
&\quad = 0 \quad \text{för } n > 1, \\
&b_1 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(\Omega t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(t)\sin(t)\,dt \\
&\quad = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\Big(1-\cos(2t)\Big)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[t-\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}. \\
&f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t\Big) \\
&\quad = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2k-1)}\cos(2kt)
\end{aligned}
$$

2. (a) Se boken.

(b) $\lambda_n = -((2n+1)\frac{\pi}{2})^2$, $X_n(x) = \sin((2n+1)\frac{\pi}{2}x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

3. (a) Den karakteristiska ekvationen är $r^2 - 9 = 0$ med rötterna $r_1 = -3$, $r_2 = 3$. Den allmänna lösningen blir

$$
\begin{aligned}
u(t) &= Ae^{-3t} + Be^{3t} \\
u'(t) &= -3Ae^{-t} + 3Be^{3t}.
\end{aligned}
$$

Begynnelsevillkoren ger

$$
\begin{aligned}
u_0 &= u(0) = A + B, \\
u_1 &= u'(0) = -3A + 3B,
\end{aligned}
$$

dvs $A = \frac{1}{6}(3u_0 - u_1)$, $B = \frac{1}{6}(3u_0 + u_1)$. Alltså:

$$u(t) = \frac{1}{6}(3u_0 - u_1)e^{-3t} + \frac{1}{6}(3u_0 + u_1)e^{3t} = u_0\cosh(3t) + \frac{1}{3}u_1\sinh(3t).$$

(b) Med $x_1 = u$, $x_2 = u'$ får vi

$$x_1' = u' = x_2,$$
$$x_2' = u'' = 9u = 9x_1,$$

dvs, på matrisform,

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

(c) Matrisen har egenvärdena $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 3$ och egenvektorer $g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Lösningen blir

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} g_1 + Be^{\lambda_2 t} g_2 = Ae^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + Be^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Begynnelsevillkoret ger

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} = x(0) = A \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

dvs $A = \frac{1}{6}(3u_0 - u_1)$, $B = \frac{1}{6}(3u_0 + u_1)$. Alltså:

$$x(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{6}(3u_0 - u_1)e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}(3u_0 + u_1)e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(d) Man skriver en m-fil kallad `funk.m`:

```
function xprime=funk(t,x)
xprime=[0 1; 9 0]*x;
```

sedan exekverar man matlabkommandona

```
>> u0=1; u1=2; x0=[u0; u1]; T=5;
>> [t,x]=ode45('funk',[0;T],x0);
```

(e) Det linjära systemet har egenvärdena -3 och 3, dvs ett är negativt. Det betyder att systemet är instabilt.

4. Den första ekvationen divideras med $q_f c_f$, den andra med $\rho c_p q_f T_f$. Med $\tau = V/q_f$ får vi

$$\tau \frac{d}{dt}\Big(\frac{c}{c_f}\Big) = \frac{q}{q_f}\frac{c_f - c}{c_f} - \frac{c}{c_f}\tau k_0 \exp\Big(-\frac{E}{RT_f}\frac{T_f}{T}\Big),$$
$$\tau \frac{d}{dt}\Big(\frac{T}{T_f}\Big) = \frac{q}{q_f}\frac{T_f - T}{T_f} + \frac{(-\Delta H)c_f}{\rho c_p T_f}\frac{c}{c_f}\tau k_0 \exp\Big(-\frac{E}{RT_f}\frac{T_f}{T}\Big) - \frac{\kappa A \tau}{\rho c_p V}\Big(\frac{T - T_f}{T_f} - \frac{T_K - T_f}{T_f}\Big).$$

Med de dimensionslösa variablerna

$$s = t/\tau,$$
$$X_1(s) = \frac{c(s\tau)}{c_f}, \quad X_2(s) = \frac{T(s\tau)}{T_f},$$
$$U_1(s) = \frac{q(s\tau)}{q_f}, \quad U_2(s) = \frac{T_K(s\tau)}{T_f},$$
$$\alpha = \frac{(-\Delta H)c_f}{\rho c_p T_f}, \quad \beta = \frac{\kappa A \tau}{\rho c_p V}, \quad \gamma = \frac{E}{RT_f}, \quad \delta = \tau k_0 e^{-\gamma}, \quad f(X_2) = \delta \exp(\gamma - \gamma/X_2),$$

får vi

$$\frac{c}{c_f} = X_1, \quad \frac{T}{T_f} = X_2, \quad \tau\frac{d}{dt}\Big(\frac{c}{c_f}\Big) = \frac{dX_1}{ds}, \quad \tau\frac{d}{dt}\Big(\frac{T}{T_f}\Big) = \frac{dX_2}{ds},$$

$$\tau k_0 \exp\Big(-\frac{E}{RT_f}\frac{T_f}{T}\Big) = \tau k_0 \exp\Big(-\frac{E}{RT_f}\Big)\exp\Big(\frac{E}{RT_f} - \frac{E}{RT_f}\frac{T_f}{T}\Big)$$

$$= \delta\exp\Big(\gamma - \frac{\gamma}{X_2}\Big) = f(X_2).$$

Detta leder till det ickelinjära differentialekvationssystemet

$$\frac{dX_1}{ds} = U_1(1-X_1) - X_1 f(X_2) \qquad (= F_1(X,U)),$$

$$\frac{dX_2}{ds} = U_1(1-X_2) + \alpha X_1 f(X_2) - \beta(X_2 - U_2) \qquad (= F_2(X,U)).$$

(b) Stationära punkter ges av

$$0 = \bar U_1(1-\bar X_1) - \bar X_1 f(\bar X_2),$$

$$0 = \bar U_1(1-\bar X_2) + \alpha\bar X_1 f(\bar X_2) - \beta(\bar X_2 - \bar U_2).$$

Vi löser ut styrvariablerna

$$\bar U_1 = \frac{\bar X_1}{1-\bar X_1} f(\bar X_2),$$

$$\bar U_2 = \bar X_2 - \frac{1}{\beta}\Big(\frac{\bar X_1}{1-\bar X_1}(1-\bar X_2) f(\bar X_2) + \alpha\bar X_1 f(\bar X_2)\Big).$$

Med $\alpha = 0.3$, $\gamma = 30$, $\delta = 0.1$ och $\bar X_1 = 0.5$, $\bar X_2 = 1$ får vi $f(1) = 0.1$ och $f'(1) = 3$, $\alpha f(1) = 0.03 \approx 0$. Dvs

$$\bar U_1 = 0.1,$$

$$\bar U_2 = 1 - \frac{0.015}{\beta}.$$

(c) Nu linjäriserar vi kring $\bar X, \bar U$. Det linjäriserade systemet blir

$$x'(s) = Ax(s) + Bu(s), \quad s > 0; \quad x(0) = x_0,$$

med Jacobimatriserna

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1}(\bar X,\bar U) & \frac{\partial F_1}{\partial X_2}(\bar X,\bar U) \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_1}(\bar X,\bar U) & \frac{\partial F_2}{\partial X_2}(\bar X,\bar U) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar U_1 - f(\bar X_2) & -\bar X_1 f'(\bar X_2) \\ \alpha f(\bar X_2) & -\bar U_1 + \alpha\bar X_1 f'(\bar X_2) - \beta \end{bmatrix},$$

där $f'(\bar X_2) = \frac{\gamma}{\bar X_2^2} f(\bar X_2)$, och

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial U_1}(\bar X,\bar U) & \frac{\partial F_1}{\partial U_2}(\bar X,\bar U) \\ \frac{\partial F_2}{\partial U_1}(\bar X,\bar U) & \frac{\partial F_2}{\partial U_2}(\bar X,\bar U) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\bar X_1 & 0 \\ 1-\bar X_2 & \beta \end{bmatrix}.$$

Vi sätter in siffervärden i A,

$$A = \begin{bmatrix} -0.2 & -1.5 \\ 0.03 & 0.35-\beta \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.2 & -1.5 \\ 0 & 0.35-\beta \end{bmatrix}$$

Den sista matrisen har egenvärdena $\lambda_1 = -0.2$ och $\lambda_2 = 0.35 - \beta$. De är båda negativa, och det linjäriserade systemet asymptotiskt stabilt, om $\beta > 0.35$. Det betyder fysikaliskt att kylarens area måste vara tillräckligt stor, större än $0.35\,\rho c_p q_f/\kappa$.

/stig