RÄKNEÖVNING

VECKA 1

David Heintz, 31 oktober 2002

Innehåll

1 Uppgift 27.1

Determine primitive functions on $\mathbb{R}$ to

a) $(1+x^2)^{-2}\,2x$

b) $(1+x)^{-99}$

c) $(1+(1+x^3)^2)^{-2}\,2(1+x^3)\,3x^2$

Att bestämma en primitiv funktion $F(x)$ till en funktion $f(x)$ (där vi har att $f : I \to \mathbb{R}$) innebär att vi söker $F(x)$ så att

$$F'(x) = f(x),$$

för alla $x \in I$. Givet en funktion $f(x)$ vill vi med andra ord hitta den funktion $F(x)$ vars derivata är lika med $f(x)$. Man skulle kunna se det som ett slags "omvänt derivationsproblem". I någon mening finns det faktiskt inte någon entydig lösning på problemet - det finns snarare många! Anledningen till det är att om $F(x)$ är en primitiv till $f(x)$, så är även

$$F(x) + C$$

en primitiv för alla konstanter C (derivatan av en konstant är ju noll). Man brukar därför säga att en primitiv funktion endast är bestämd upp till en konstant.

När vi beräknar integraler är det viktigt att kunna bestämma primitiva funktioner. Därför är det också bra att känna till de vanligaste primitiva funktionerna, nämligen de till våra "elementära" funktioner. Vi skrev upp dem på tavlan under ALA-a, men det skadar säkert inte att repetera dem. Om det skulle vara så att ni inte har hunnit tala om alla dessa med Stig, så dyker de säkert upp under resans gång. Jag låter nedan

$$\int f(x)\,dx \tag{1}$$

betecka en primitiv - vilken som helst - till $f(x)$. Vi får inte glömma att addera den godtyckliga konstanten C till den speciellt angivna primitiven i högerledet.

$$\int \alpha\,dx \quad = \quad \alpha x + C, \qquad \alpha \text{ konstant} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
\int x^\alpha\,dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \qquad \alpha\neq -1 && (3)\\
\int \frac{1}{x}\,dx &= \ln|x|+C && (4)\\
\int e^x\,dx &= e^x+C && (5)\\
\int \cos x\,dx &= \sin x+C && (6)\\
\int \sin x\,dx &= -\cos x+C && (7)\\
\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx &= \tan x+C && (8)\\
\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx &= -\cot x+C && (9)\\
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \arctan x+C && (10)\\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \arcsin x+C && (11)\\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx &= \ln|x+\sqrt{x^2+\alpha}|+C. && (12)
\end{aligned}$$

Om ni inte tror på formlerna ovan, är det bara att sätta igång och derivera högerleden (vilket vi är världsmästare på sedan ALA-a) och se efter om vi inte får tillbaka integranderna i vänsterledet!

Nu är det dags att beta av den första uppgiften i kaptiel 27.

a)

$$f(x)=(1+x^2)^{-2}\,2x=\frac{1}{(1+x^2)^2}\,2x,$$

där vi m.h.a. (3) identifierar

$$F(x)=-(1+x^2)^{-1}+C=-\frac{1}{1+x^2}+C,$$

och noterar att faktorn $2x$ kommer från den inre derivatan.

b)

$$f(x)=(1+x)^{-99},$$

och genom (3) fås att

$$F(x) = -\frac{1}{98}\,(1+x)^{-98} + C.$$

c)

$$f(x) = (1+(1+x^3)^2)^{-2}\,2(1+x^3)\,3x^2.$$

Jag visste knappt att det fanns så här långa funktioner... och tydligen måste vi räkna med den. Vad göra? Faktum är att det inte blir så svårt trots allt. Vi kan återigen använda (3), ty faktorn $2(1+x^3)\,3x^2$ är inget annat än en inre derivata till $(1+(1+x^3)^2)^{-2}$. Vi får

$$F(x) = -(1+(1+x^3)^2)^{-1} + C,$$

och är klara.

2 Uppgift 27.8

Find the solutions of the initial value problem $u'(x) = f(x)$ **for** $x > 0$, $u(0) = 1$**, in the following cases**

a) $f(x) = 0$

b) $f(x) = 1$

c) $f(x) = x^r, \ r > 0$

Innan vi löser uppgifterna minns vi *The Fundamental Theorem of Calculus*

Sats. Givet en Lipschitzkontinuerlig funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ existerar en entydigt (likformigt deriverbar) bestämd funktion $u : [a, b] \to \mathbb{R}$, som löser begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} u'(x) &= f(x) \\ u(a) &= u_a \end{cases}$$

för $x \in [a, b]$ och med u_a given. Lösningen kan skrivas

$$u(\overline{x}) = u_a + \int_a^{\overline{x}} f(x)\, dx. \tag{13}$$

Vi kommer att använda oss flitigt av satsen när vi löser deluppgifterna ovan.

a)

Vi har

$$\begin{cases} u'(x) &= 0 \\ u(0) &= 1 \end{cases}$$

och via (13) fås lösningen

$$u(x) = u(0) + \underbrace{\int_0^x 0\, dy}_{=0} = u(0) = 1.$$

b)

$$\begin{cases} u'(x) &= 1 \\ u(0) &= 1 \end{cases}$$

Vi får genom (13)

$$u(x) = u(0) + \int_0^x 1\,dy = u(0) + [y]_0^x = 1 + (x - 0) = 1 + x.$$

c)

$$\begin{cases} u'(x) &= x^r \\ u(0) &= 1 \end{cases}$$

Får återigen via (13) att

$$\begin{aligned} u(x) &= u(0) + \int_0^x y^r\,dy = u(0) + \left[\frac{y^{r+1}}{r+1}\right]_0^x = 1 + \left(\frac{x^{r+1}}{r+1} - 0\right) = \\ &= 1 + \frac{x^{r+1}}{r+1}. \end{aligned}$$

Vi är klara.

3 Uppgift 27.9

Find the solution to the second order initial value problem $u''(x) = f(x)$ for $x > 0$, $u(0) = u'(0) = 1$, in the following cases

a) $f(x) = 0$

b) $f(x) = 1$

c) $f(x) = x^r$, $r > 0$

I ett begynnelsevärdesproblem löser man en differentialekvation (DE) i kombination med ett eller flera villkor. Dessa villkor är inte nödvändiga för att få en lösning, men utan dem fås endast en *allmän lösning* till problemet. Med det menas att vi i lösningen har en eller flera godtyckliga konstanter (beroende på ordningen av DEn). Det är dessa konstanter vi kommer åt med villkoren, vilket ger oss en *specifik lösning* av problemet, utan några obekanta.

Att det heter just "begynnelsevärdesproblem" kan ha att göra med att de ekvationer vi löser ofta modellerar skeenden i tiden. Ett typiskt exempel, som ni säkert kommer att råka ut för, kan vara att följa koncentrationer av produkter och reaktanter i en kemisk en reaktion. De massbalanser man ställer upp för att lösa dessa problem leder vanligt till ordinära differentialekvationer av första ordningen.

Med en ordinär differentialekvation (ODE) menar man att den obekanta funktionen endast beror av en variabel, dvs. att $u'(x) = f(x, u(x))$ med x som variabel. När man säger att ekvationen är av första ordningen avses att den högsta förekommande derivatan har just ordning ett. I de uppgifter vi nu ska lösa handlar det om ODEs av andra ordningen (ty det förekommer andraderivator i uttrycken).

De differentialekvationer vi hittills råkat ut för är av den enklaste formen, dvs. att den allmänna lösningen kan skrivas

$$u'(x) = f(x) \implies u(x) = F(x) + A,$$

ett problem som löses direkt med integration. I uppgift 27.9 har vi

$$u''(x) = f(x) \implies u'(x) = F(x) + A \implies u(x) = \tilde{F}(x) + Ax + B$$

med A, B som godtyckliga konstanter och $\tilde{F}(x)$ som en primitiv till $F(x)$

(som i sin tur var en primitiv till $f(x)$). Vi har här utfört två integrationer för att få $u(x)$. På samma sätt gör vi nu och använder fundamentalsatsen två gånger. Det kommer inte att dyka upp några konstanter A och B i våra lösningar, tack vare villkoren $u(0) = u'(0) = 1$.

a)

Vi har att

$$\begin{cases} u''(x) &= 0 \\ u(0) &= 1 \\ u'(0) &= 1 \end{cases}$$

och får

$$\begin{aligned} u'(x) &= u'(0) + \underbrace{\int_0^x 0\,dy}_{=0} = u'(0) = 1 \\ u(x) &= u(0) + \int_0^x 1\,dy = u(0) + [y]_0^x = 1 + (x-0) = 1 + x, \end{aligned}$$

efter att lösningen till $u''(x)$ använts som integrand i lösningen av $u'(x)$.

b)

$$\begin{cases} u''(x) &= 1 \\ u(0) &= 1 \\ u'(0) &= 1 \end{cases}$$

Fundamentalsatsen säger att

$$\begin{aligned} u'(x) &= u'(0) + \int_0^x 1\,dy = u'(0) + [y]_0^x = 1 + (x-0) = 1 + x \\ u(x) &= u(0) + \int_0^x (1+y)\,dy = u(0) + \left[y + \frac{1}{2}\,y^2\right]_0^x = 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{cases} u''(x) &= x^r \\ u(0) &= 1 \\ u'(0) &= 1 \end{cases}$$

Man får att

$$
\begin{aligned}
u'(x) &= u'(0) + \int_0^x y^r \, dy = u'(0) + \left[\frac{y^{r+1}}{r+1} \right]_0^x = 1 + \frac{x^{r+1}}{r+1} \\
u(x) &= u(0) + \int_0^x \left(1 + \frac{y^{r+1}}{r+1} \right) dy = u(0) + \left[y + \frac{y^{r+2}}{(r+1)(r+2)} \right]_0^x \\
&= 1 + x + \frac{x^{r+2}}{(r+1)(r+2)}.
\end{aligned}
$$

Därmed är vi klara.

4 Uppgift 27.10

Solve the initial value problem $u'(x) = f(x)$ for $x \in (0, 2]$, $u(0) = 1$, where $f(x) = 1$ for $x \in [0, 1)$ and $f(x) = 2$ for $x \in [1, 2]$. Draw the graph of the solution and calculate $u\left(\frac{3}{2}\right)$. Show that $f(x)$ is not Lipschitz continuous on $[0, 2]$ and determine if $u(x)$ is Lipschitz continuous on $[0, 2]$.

Vi har att $f(x)$ är definierad olika på $I = [0, 2]$. Låt oss därför lösa uppgiften i två steg över delintervallen $I_1 = (0, 1]$ samt $I_2 = (1, 2]$. Vi har till att börja med

$$\begin{cases} u'(x) &= 1 \\ u(0) &= 1 \end{cases}$$

för $x \in I_1$. Fundamentalsatsen säger att

$$u(x) = u(0) + \int_0^x 1\,dy = 1 + [y]_0^x = 1 + (x - 0) = 1 + x \tag{14}$$

Vi är emellertid inte färdiga, utan måste betrakta vad som händer I_2. Det leder oss till ett nytt begynnelsevärdesproblem, nämligen

$$\begin{cases} u'(x) &= 2 \\ u(1) &= 2 \end{cases}$$

där det nya villkoret (dvs. $u(1) = 2$) följer ur (14). Vi får därför att

$$u(x) = u(1) + \int_1^x 2\,dy = 2 + [2y]_1^x = 2 + (2y - 2) = 2x.$$

Med andra ord ges lösningen av

$$u(x) = \begin{cases} 1 + x, & x \in [0, 1] \\ 2x, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

där $u\left(\frac{3}{2}\right) = \left\{u(x) = 2x, \text{ ty } x = \frac{3}{2} \in [1, 2]\right\} = 2\,\frac{3}{2} = 3$, vilket kan bekräftas ur plottar av $u(x)$ respektive $f(x)$. Vi visar dem i slutet av uppgiften.

Det inses att $f(x)$ inte kan vara Lipschitzkontinuerlig, eftersom funktionen gör ett "hopp" från att vara 1 till att bli 2 i punkten $x = 1$. Men hur visar man det? Ett sätt är att återvända till definitionen

$$|f(x) - f(y)| \le L\,|x - y| \tag{15}$$

och välja x och y på ett lämpligt sätt, typiskt så att punkterna ligger på varsin sida om "hoppet". Vi prövar med $x = 1$ samt $y = 1 - \frac{1}{N}$, där $N \in \mathbb{R}$. Gör man på det sättet kommer y för ett stort N att ligga alldeles till vänster om $x = 1$, dvs. precis innan $f(x)$ byter värde. Vi noterar även att $|x - y|$ är ett positivt tal, varför vi kan skriva olikheten (15) på formen

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq L \tag{16}$$

där det med insatta värden fås att

$$\frac{|2 - 1|}{|1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)|} = \frac{1}{\frac{1}{N}} = N > L,$$

eftersom N kan väljas godtyckligt (och då särskilt större än just L). Med andra ord gäller inte (16) och därmed kan inte $f(x)$ vara Lipschitzkontinuerlig. Däremot kommer $u(x)$ att vara det, ty på I_1 ges att

$$|u(x) - u(y)| = |1 + x - (1 + y)| = |x - y|$$

dvs.

$$|u(x) - u(y)| \leq L_1 \, |x + y|$$

med $L_1 = 1$. På I_2 har vi samtidigt

$$|u(x) - u(y)| = |2x - 2y| = 2\,|x - y|$$

och

$$|u(x) - u(y)| \leq L_2 \, |x + y|$$

där $L_2 = 2$. Vi har nu visat att $u(x)$ är Lipschitzkontinuerlig på I_1 och I_2 var för sig. Men helt klara är vi först när vi också visat att $u(x)$ är Lipschitzkontinuerlig då x och y tillhör olika delintervall (hittills har vi ju antagit att de ligger i samma). Låt därför $y \in I_1$ och $x \in I_2$, varefter vi kan skriva

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &= |2x - (1 + y)| = \left|(x + y)\left(2 + \frac{y - 1}{x - y}\right)\right| \\ &= |x - y| \left|2 + \frac{y - 1}{x - y}\right|. \end{aligned}$$

För att bestämma Lipschitzkonstanten behöver vi beräkna det maximala värdet av $\left|2+\frac{y-1}{x-y}\right|$. Det inses att den andra termen i uttrycket (dvs. kvoten) är negativ, eftersom täljaren och nämnaren har olika tecken (kom ihåg att vi har antagit $0 \leq y < 1$, $1 \leq x \leq 2$). Frågan är vad som händer om vi gör nämnaren liten? Låt därför $x = 1$ och studera gränsvärdet

$$\lim_{y\to 1} \frac{y-1}{1-y} = \{\text{L'Hopital}\} = \lim_{y\to 1} \frac{D(y-1)}{D(1-y)} = \lim_{y\to 1} \frac{1}{-1} = -1,$$

vilket inte ger oss något maximalt värde (snarare ett minimalt). Eftersom nämnaren till beloppet är större än täljaren för alla andra värden på x, inser vi att

$$\max \left|2+\frac{y-1}{x-y}\right| = 2,$$

när $y \to 1$, $x > 1$. Här antar kvoten sitt största värde 0. Vi får alltså Lipschitzkonstanten $L_3 = 2$ om x och y ligger i olika delintervall. Slutsatsen blir att $u(x)$ på $I = [0,\, 2]$ är Lipschitzkontinuerlig med

$$L = \max\,[L_1\, L_2\, L_3] = 2.$$

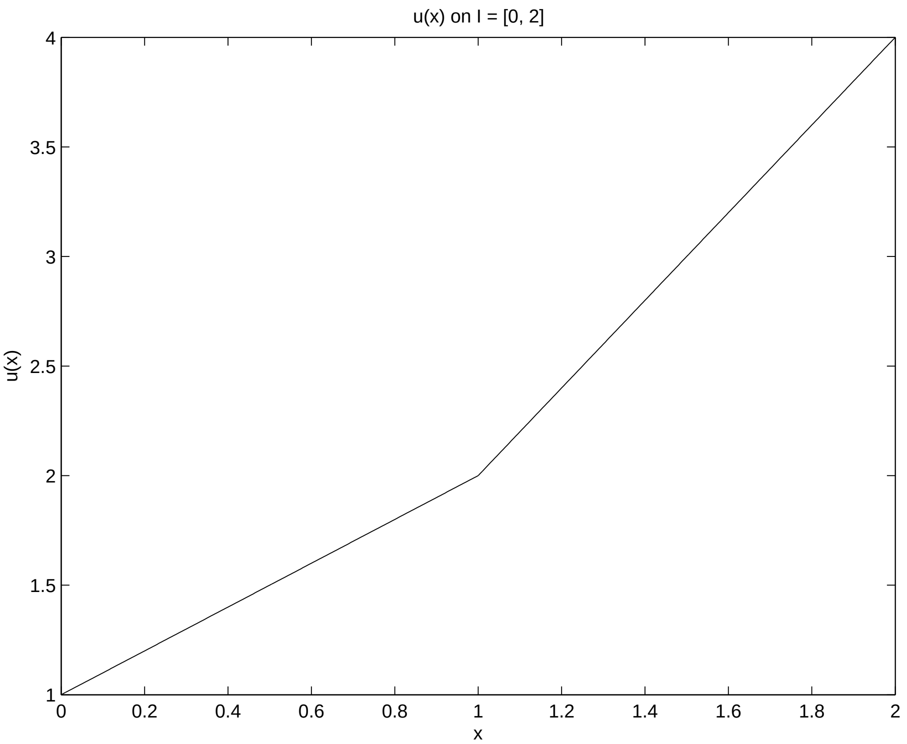
Vi är så gott som klara med uppgiften. En sista fråga man kan ställa sig är huruvida $u(x)$ är deriverbar? Det är faktiskt inte självklart att svaret är ja. Det som ställer till det är återigen punkten $x = 1$. Man ser i funktionsgrafen att $u(x)$ här gör en liten "knyck". Försöker vi beräkna $u'(x)$ ur definitionen av derivatan som ett gränsvärde, fås olika resultat beroende på om vi närmar oss $x = 1$ från höger eller vänster

$$\begin{aligned} u'(1^-) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1+(1+h)-(1+1)}{h} = \frac{h}{h} = 1 \\ u'(1^+) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\,(1+h)-2\cdot 1}{h} = \frac{2h}{h} = 2. \end{aligned}$$

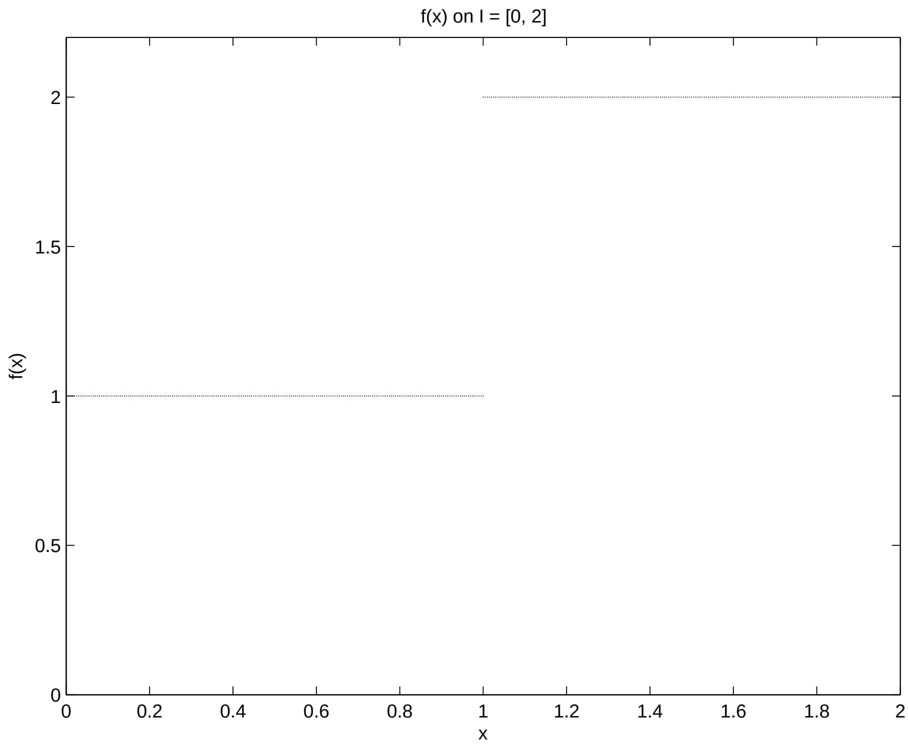
Det innebär att gränsvärdet av differenskvoten inte existerar; *höger*- och *vänsterderivatan* är nämligen inte lika. Man brukar istället säga att $u(x)$ är *styckvis deriverbar*, i den mening att $u(x)$ på sitt intervall är deriverbar överallt utom i ett ändligt antal punkter (här har vi t.ex. $x = 1$ som ensam punkt).

Detta ingick emellertid inte i uppgiften. Vad man kan lägga på minnet är att även om en deriverbar funktion också är kontinuerlig, behöver inte motsatsen gälla. En kontinuerlig funktion måste inte vara deriverbar (även om så ofta är fallet).

Vi rundar av med att visa de utlovade funktionsgraferna. Notera att nettoarean under grafen för $f(x)$ motsvarar värdet av $u(x)$ när vi lägger till begynnelsevärdet $u(0) = 1$.



Figur 1: Funktionsgrafen för $u(x)$.



Figur 2: Funktionsgrafen för $f(x)$.

5 Uppgift 28.1

Compute the following integrals

a) $\int_0^1 (ax + bx^2)\, dx$

b) $\int_{-1}^1 |x|\, dx$

c) $\int_{-1}^1 |x - 1|\, dx$

d) $\int_{-1}^1 |x + a|\, dx$

e) $\int_{-1}^1 (x - a)^{10}\, dx$

Vi tuffar glatt på och löser deluppgifterna m.h.a. (2) och (3), samt ett och ett annat litet knep.

a)

$$\int_0^1 (ax + bx^2)\, dx \quad = \quad \left[\frac{1}{2}\, ax^2 + \frac{1}{3}\, bx^3\right]_0^1 = \frac{1}{2}\, a + \frac{1}{3}\, b.$$

b)

$$\int_{-1}^1 |x|\, dx \quad = \quad 2 \int_0^1 x\, dx = 2\, \left[\frac{1}{2}\, x^2\right]_0^1 = 1.$$

Här har jag utnyttjat att integranden $|x|$ är en *jämn funktion*, dvs. att

$$f(-x) = f(x).$$

En enklare(?) förklaring ges om vi plottar $|x|$ på intervallet $[-1, 1]$. Då märker man att funktionen är sin egen spegelbild i vertikalaxeln, vilket säger oss att vi har en jämn funktion. En annan typiskt jämn funktion är $\cos x$.

Från plotten (gör den själva!) inser vi också att nettoarean mellan funktionsgrafen och horisontalaxeln måste vara detsamma som dubbla arean på positiva sidan av realaxeln (intervallet $[-1,\,1]$ är ju symmetriskt kring nollan). Det är därför jag beräknat integralen som jag gjort.

c)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}|x-1|\,dx &= \int_{-1}^{1}(1-x)\,dx = \left[x-\frac{1}{2}\,x^2\right]_{-1}^{1} \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(-1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2.\end{aligned}$$

Plottar vi $|x-1|$ på $[-1,\,1]$ har vi en rät linje med lutningen -1 samt skärningen 1 med vertikalaxeln. Det motiverar omskrivningen av integranden. Notera emellertid att detta inte är en generell omskrivning. Hade intervallet varit annorlunda, säg $[-1,\,2]$, skulle det inte ha fungerat. Ett sätt att ta i tu med sådana integraler är att dela upp dem över flera delintervall, vart och ett med sin specifika integrand (som måste identifieras t.ex. ur en plott av funktionsgrafen). Den ursprungliga integralen blir då lika med summan av delintegralerna.

d)

Nästa uppgift är lite lurig. Vi har

$$\int_{-1}^{1}|x+a|\,dx,$$

en integral som faktiskt måste lösas i tre separata fall, nämligen

i) om $a\le -1$ blir $|x+a|=-(x+a)$

ii) om $-1<a<1$ blir $|x+a|=-(x+a)$ på $[-1,\,-a]$ samt $x+a$ på $[-a,\,1]$

iii) om $a\ge 1$ blir $|x+a|=x+a$

Integranderna kommer att alltså bero av värdet på a, varför vi får tre olika lösningar. Låt oss ta dem i tur och ordning.

i)

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} |x+a|\,dx &= -\int_{-1}^{1} (x+a)\,dx = -\left[\frac{1}{2}\,x^2+ax\right]_{-1}^{1} \\
&= -\left(\frac{1}{2}+a\right)+\left(\frac{1}{2}-a\right) = -2a
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} |x+a|\,dx &= -\int_{-1}^{-a} (x+a)\,dx + \int_{-a}^{1} (x+a)\,dx \\
&= -\left[\frac{1}{2}\,x^2+ax\right]_{-1}^{-a} + \left[\frac{1}{2}\,x^2+ax\right]_{-a}^{1} \\
&= -\left(\frac{1}{2}\,a^2-a^2-\left(\frac{1}{2}-a\right)\right)+\frac{1}{2}+a-\left(\frac{1}{2}\,a^2-a^2\right) \\
&= a^2+1.
\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} |x+a|\,dx &= \int_{-1}^{1} (x+a)\,dx = \left[\frac{1}{2}\,x^2+ax\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{2}+a-\left(\frac{1}{2}-a\right) = 2a.
\end{aligned}$$

e)

$$\int_{-1}^{1} (x-a)^{10}\,dx = \left[\frac{1}{11}\,(x-a)^{11}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{11}\,\big((1-a)^{11}+(1+a)^{11}\big)\,,$$

enligt (3). Vi är klara.

6 Uppgift 28.2

Compute the following integrals by integration by parts. Verify that you get the same result by directly finding the primitive function.

a) $\int_0^1 x^2\,dx = \int_0^1 x\,x\,dx$

b) $\int_0^1 x^3\,dx = \int_0^1 x\,x^2\,dx$

c) $\int_0^1 x^3\,dx = \int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\,x^{\frac{3}{2}}\,dx$

d) $\int_0^1 (x^2-1)\,dx = \int_0^1 (x+1)\,(x-1)\,dx$

Det händer emellanåt att man råkar ut för integrander som verkar ha allt annat än en primitiv funktion, och det är nu det kan vara bra att integrera partiellt. En idé är t.ex. att successivt reducera graden av ett polynom eller en faktor i integranden, tills dess att den kvarvarande integralen är lätt att lösa. I den här uppgiften har vi egentligen ingen anledning att integrera partiellt, det är förmodligen mest en övning för att övertyga oss om att det verkligen går! Vi har hursomhelst att

$$\int f(x)\,g(x) = F(x)\,g(x) - \int F(x)\,g'(x)\,dx,$$

om $F(x)$ är en primitiv till $f(x)$. Beviset är ganska enkelt. Det räcker egentligen med att visa att derivatan av högerledet är lika med integranden $f(x)\,g(x)$ i vänsterledet. Man får, genom produktregeln för derivatan, att

$$\begin{aligned} D\left(F(x)\,g(x) - \int F(x)\,g'(x)\,dx\right) &= F'(x)\,g(x) + F(x)\,g'(x) - F(x)\,g'(x) \\ &= F'(x)\,g(x) = f(x)\,g(x), \end{aligned}$$

och vi är i hamn.

Vidare till uppgifterna!

a)

Vi beräknar först integralerna “som vanligt”, varefter vi tar till partiell integration och bekräftar att resultaten överensstämmer.

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}\,x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

respektive

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\,dx &= \int_0^1 x\,x\,dx = \left[\frac{1}{2}\,x^2\,x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}\,x^2 \cdot 1\,dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\,dx,\end{aligned}$$

men om vi “flyttar över” integralen på högersidan till vänsterledet erhålles att

$$\frac{3}{2}\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{2} \implies \int_0^1 x^2\,dx = \frac{2}{3}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Resultaten är med andra ord lika.

b)

$$\int_0^1 x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}\,x^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

respektive

$$\int_0^1 x^3\,dx = \int_0^1 x\,x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}\,x^3\,x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3}\,x^3 \cdot 1\,dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\int_0^1 x^3\,dx,$$

där vi ser att

$$\frac{4}{3}\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{3} \implies \int_0^1 x^3\,dx = \frac{3}{4}\,\frac{1}{3} = \frac{1}{4}.$$

c)

Integralen har vi redan beräknat i förra uppgiften (två gånger till och med!). Vi prövar bara att leka lite till med integranden...

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^3\,dx &= \int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\,x^{\frac{3}{2}}\,dx = \left[\frac{2}{5}\,x^{\frac{5}{2}}\,x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{5}\,x^{\frac{5}{2}}\cdot\frac{3}{2}\,x^{\frac{1}{2}}\,dx \\ &= \frac{2}{5} - \frac{3}{5}\int_0^1 x^3\,dx,\end{aligned}$$

och vi har på samma sätt som tidigare att

$$\frac{8}{5}\int_0^1 x^3\,dx = \frac{2}{5} \implies \int_0^1 x^3\,dx = \frac{5}{8}\,\frac{2}{5} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}.$$

d)

$$\int_0^1 (x^2-1)\,dx = \left[\frac{1}{3}\,x^3 - x\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$$

respektive

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x^2-1)\,dx &= \int_0^1 (x+1)\,(x-1)\,dx \\ &= \underbrace{\left[\left(\frac{1}{2}\,x^2 + x\right)\,(x-1)\right]_0^1}_{x=0} - \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\,x^2 + x\right)\cdot 1\,dx \\ &= -\left[\frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{2}\,x^2\right]_0^1 = -\frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Det är först när man blir tvungen att bekräfta satser med praktiska beräkningar som man lär sig att uppskatta och föredra bevisen...

7 Uppgift 28.4

Compute the following intergrals

a) $\int_{-1}^{2}(2x-1)^7\,dx$

b) $\int_0^1 f'(7x)\,dx$

c) $\int_{-10}^{-7} f'(17x+5)\,dx$

Så var det dags att räkna ett par integraler till. Vi kommer ihåg de elementära primitiva funktionerna och knäcker dem i ett nafs. Nästan i alla fall.

a)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}(2x-1)^7\,dx &= \left[\frac{1}{8}(2x-1)^8\cdot\frac{1}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{16}\left[(2x-1)^8\right]_{-1}^{2}\\ &= \frac{1}{16}(3^8-(-3)^8)=0,\end{aligned}$$

där faktorn $\frac{1}{2}$ tillkommer för att ta ut den inre derivatan från $2x-1$.

b)

$$\int_0^1 f'(7x)\,dx = \left[\frac{1}{7}f(7x)\right]_0^1 = \frac{1}{7}(f(7)-f(0)),$$

där faktorn $\frac{1}{7}$ tillkommer för att ta bort den inre derivatan. Den primitiva funktionen (utan den godtyckliga konstanten) till $f'(x)$ är givetvis $f(x)$.

c)

$$\int_{-10}^{-7} f'(17x+5)\,dx = \left[\frac{1}{17}f(17x+5)\right]_{-10}^{-7} = \frac{1}{17}(f(-114)-f(-165)),$$

och vi är klara.