RÄKNEÖVNING

VECKA 2

David Heintz, 13 november 2002

Innehåll

1 Uppgift 29.4

Prove that $\ln(1+x) \leq x$ **for** $x > 0$**, and that** $\ln(1+x) < x$ **for** $x \neq 0$ **and** $x > -1$**.**

Notera att jag använder beteckningen $\ln(x)$ för den *naturliga logaritmen* (med basen e) istället för $\log(x)$.

I den första deluppgiften skall vi visa påståendet för $x > 0$. Låt oss ta hjälp av definitionen

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{y}\,dy, \qquad \text{för } x > 0 \tag{1}$$

vilken tillåter att vi skriver

$$\ln(1+x) = \int_1^{1+x} \frac{1}{y}\,dy.$$

Men eftersom $\frac{1}{y} \leq 1$ för $y \geq 1$, och integralen är *monoton*, dvs. att

$$f(x) \leq g(x) \text{ på } [a,\, b] \implies \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx,$$

får vi att

$$\ln(1+x) = \int_1^{1+x} \frac{1}{y}\,dy \leq \int_1^{1+x} 1\,dy = [y]_1^{1+x} = (1+x-1) = x,$$

med likhet för $x = 0$ (kom ihåg att $\ln(1) = 0$). Återstår gör att visa olikheten för $-1 < x < 0$. Vi sätter därför $z = -x > 0$ (ty x var negativ) och får via (1) att

$$\ln(1+x) = \ln(1-z) = \int_1^{1-z} \frac{1}{y}\,dy.$$

Vidare minns vi definitionen

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx, \tag{2}$$

som säger att vid byte av integrationsgränserna byter integralen även tecken. Man har dessutom att

$$\int_a^b \alpha\, f(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx, \tag{3}$$

där α är en konstant. Genom (2) och (3) fås

$$\begin{aligned}
\ln(1-z) &= \int_1^{1-z} \frac{1}{y}\, dy = -\int_{1-z}^{1} \frac{1}{y}\, dy = \int_{1-z}^{1} -\frac{1}{y}\, dy \leq \\
&\leq \left\{ \tfrac{1}{y} \geq 1 \text{ då } 0 < z < 1 \right\} \leq \int_{1-z}^{1} -1\, dy = [-y]_{1-z}^{1} = \\
&= -(1-1+z) = -z = x.
\end{aligned}$$

Vi har nu lyckats visa olikheten för hela intervallet $x > -1$ och är klara.

Ett annat sätt att närma sig lösningen (se tipset till uppgiften) är att derivera de båda funktionerna $\ln(1+x)$ samt x, vilket ger

$$\begin{aligned}
D\ln(1+x) &= \tfrac{1}{1+x} \\
Dx &= 1.
\end{aligned}$$

Vi har att funktionerna är strängt växande för $x > -1$ (ty deras derivator är positiva), och eftersom $\frac{1}{1+x} < 1$ för $x > 0$ (dvs. att x här växer snabbare än $\ln(1+x)$) följer påståendet för dessa x-värden. För $-1 < x < 0$ har vi å andra sidan att kvoten $\frac{1}{1+x} > 1$ (lutningen blir tydligen brantare för $\ln(1+x)$ än för x). Men då båda funktionerna antar negativa värden på intervallet måste det gälla att $\ln(1+x) < x$ (utom i nollan där de är lika). Därmed är den givna olikheten visad.

2 Uppgift 29.11

Solve the following equations

a) $\ln(x^2) + \ln(3) = \ln(\sqrt{x}) + \ln(5)$

b) $\ln(7x) - 2\ \ln(x) = \ln(3)$

c) $\ln(x^3) - \ln(x) = \ln(7) - \ln(x^2)$

Först och främst minns vi räknelagarna (för a, $b \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \ln(1) &= 0 \\ \ln(ab) &= \ln(a) + \ln(b), \\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln(a) - \ln(b), \\ \ln\left(a^b\right) &= b\ \ln(a), \end{aligned}$$

som gäller även för logaritmer med andra baser än e. De kommer att utnyttjas flitigt när vi löser uppgifterna. Låt oss ta dem i tur och ordning.

a)

$$\begin{aligned} \ln(x^2) + \ln(3) &= \ln(\sqrt{x}) + \ln(5) \\ 2\ \ln(x) + \ln(3) &= \frac{1}{2}\ \ln(x) + \ln(5) \\ \frac{3}{2}\ \ln(x) &= \ln(5) - \ln(3) \\ \ln(x) &= \frac{2}{3}\ \ln\left(\frac{5}{3}\right) \\ \ln(x) &= \ln\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \\ x &= \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{2}{3}}, \end{aligned}$$

där vi i första steget bl.a. har att $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

b)

$$\begin{aligned}
\ln(7x) - 2\ln(x) &= \ln(3) \\
\ln(7) + \ln(x) - 2\ln(x) &= \ln(3) \\
-\ln(x) &= \ln(3) - \ln(7) \\
\ln(x) &= -\ln\left(\frac{3}{7}\right) \\
\ln(x) &= \ln\left(\frac{7}{3}\right) \\
x &= \frac{7}{3}.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\ln(x^3) - \ln(x) &= \ln(7) - \ln(x^2) \\
3\ln(x) - \ln(x) &= \ln(7) - 2\ln(x) \\
4\ln(x) &= \ln(7) \\
\ln(x) &= \frac{1}{4}\ln(7) \\
\ln(x) &= \ln(7^{\frac{1}{4}}) \\
x &= 7^{\frac{1}{4}}.
\end{aligned}$$

Lösningarna ges utan vidare kommentarer med hänvisning till räknelagarna.

3 Uppgift 29.12

Compute the derivatives of the following functions

a) $f(x) = \ln\left(x^3 + 6x\right)$

b) $f(x) = \ln(\ln(x))$

c) $f(x) = \ln\left(x + x^2\right)$

d) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

e) $f(x) = x\ \ln(x) - x$

Derivatan av den naturliga logaritmen ges av

$$D\ \ln(x) = \frac{1}{x}, \tag{4}$$

för $x > 0$. Vi får därför att

a)

$$D\ \ln\left(x^3 + 6x\right) = \frac{1}{x^3 + 6x} \cdot \left(3x^2 + 6\right) = \frac{3x^2 + 6}{x^3 + 6x},$$

enligt kedjeregeln.

b)

$$D\ \ln(\ln(x)) = \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x\ \ln(x)},$$

där den inre derivatan blev $\frac{1}{x}$.

c)

$$D\ \ln\left(x + x^2\right) = \frac{1}{x + x^2} \cdot (1 + 2x) = \frac{1 + 2x}{x + x^2},$$

på samma sätt som ovan.

d)

$$D \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{x}{x^2} = -\frac{1}{x},$$

enligt tidigare.

e)

$$D\left(x \ln(x) - x\right) = 1 \cdot \ln(x) + x\,\frac{1}{x} \cdot 1 - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x),$$

där vi använt oss av såväl produkt- som kedjeregeln för derivatan.

4 Uppgift 31.10

Find a primitive function to

a) $f(x) = x\,e^{-x^2}$

b) $f(x) = x^3\,e^{-x^2}$

Innan vi ger oss i kast med övningarna repeterar vi hur man beräknar *differentialer* samt begreppet *variabelsubstitution*.

Givet en funktion $f(x)$ av en variabel ges differentialen df enligt

$$df = f'(x)\,dx, \tag{5}$$

medan en funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ av n variabler får sin differential bestämd genom

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_n. \tag{6}$$

Vi kommer att få nytta av detta t.ex. i samband med variabelbyten vid beräkning av integraler.

Vidare vet vi att

$$F(x) = \int f(x)\,dx + C \tag{7}$$

betecknar primitiva funktioner till $f(x)$. Genom substitutionen $x = g(t)$ erhålles istället

$$F(g(t)) = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt + C, \tag{8}$$

ty enligt (5) ges att

$$x = g(t) \implies dx = g'(t)\,dt.$$

Att de båda leden i (8) verkligen överensstämmer ser man genom att derivera VL

$$D\,F(g(t)) = F'(g(t))\,g'(t) = f(g(t))\,g'(t)$$

och vi får integranden i HL (i enlighet med definitionen av primitiv funktion).

Meningen med variabelbytet (från x till $g(t)$) är att den primitiva funktionen till den nya integranden ska bli lättare att beräkna. Om så är fallet löser vi integralen och avslutar med att återgå till den ursprungliga variabeln x.

Förfarandet är OK så länge substitutionen $x = g(t)$ är *injektiv*. Med det menas att varje funktionsvärde $g(t)$ ges av ett entydigt t (med andra ord får två värden ur definitionsmängden inte ge upphov till samma funktionsvärde). En typiskt injektiv funktion har vi i en strängt växande eller avtagande funktion.

Vi låter de givna deluppgifterna exemplifiera hur man praktiskt använder sig av variabelsubstitution vid lösning av integraler.

a)

Vi har i (7) att

$$F(x) \;=\; \int x\, e^{-x^2}\, dx + C = -\frac{1}{2}\, e^{-x^2} + C,$$

via direkt identifikation.

b)

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int x^3\, e^{-x^2}\, dx + C = \left[\begin{array}{ccc} x^2 & = & t \\ 2x\, dx & = & dt \end{array}\right] = \int \frac{1}{2}\, t\, e^{-t}\, dt + C \\
&= \{\text{partiell integration}\} = \frac{1}{2}\left(\left[-e^{-t}\, t\right] + \int e^{-t}\cdot 1\, dt\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\left(-e^{-t}\, t + \left[-e^{-t}\right]\right) + C = -\frac{1}{2}\, e^{-t}\,(1+t) + C \\
&= \{\text{återgå till variabeln } x\} = -\frac{1}{2}\, e^{-x^2}\,(1+x^2) + C,
\end{aligned}$$

där vi i första steget använt oss av variabelsubstitutionen $x^2 = t$.

5 Uppgift 31.11

Compute the derivatives of the following functions

a) $f(x) = a^x, \ a > 0$

b) $f(x) = e^{x+1}$

c) $f(x) = x\, e^{x^2}$

d) $f(x) = x^3\, e^{x^2}$

e) $f(x) = e^{-x^2}$

Innan vi löser uppgifterna minns vi att exponentialfunktionen e^x är deriverbar med derivatan

$$D\, e^x = e^x.$$

Något som är bra att komma ihåg är att

$$e^{\ln(x)} = x, \tag{9}$$

vilket i ord innebär att $\ln(x)$ är det tal e skall upphöjas till för att ge x.

a)

Vi utnyttjar omskrivningen i (9) och får

$$f(x) = a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \ln(a)},$$

varefter

$$D\, a^x = D\, e^{x \ln(a)} = \ln(a)\, e^{x \ln(a)} = \ln(a)\, a^x.$$

Vi har funnit derivatan till de allmänna exponentialfunktionerna a^x. Notera att en funktion av typen x^a med fix exponent a och variabel bas x kallas *potensfunktion*, medan vi i det omvända fallet med fix bas samt variabel exponent har en *exponentialfunktion*.

b)

$$D\, e^{x+1} = e^{x+1},$$

ty den inre derivatan är “fortfarande” 1.

c)

$$D\, x\, e^{x^2} = 1 \cdot e^{x^2} + x \cdot 2x\, e^{x^2} = e^{x^2} \left(1 + 2x^2\right),$$

enligt produktregeln.

d)

$$D\, x^3\, e^{x^2} = 3x^2\, e^{x^2} + x^3 \cdot 2x\, e^{x^2} = e^{x^2} \left(3x^2 + 2x^4\right) = x^2\, e^{x^2} \left(3 + 2x^2\right),$$

på samma sätt som ovan.

e)

$$D\, e^{-x^2} = -2x\, e^{-x^2},$$

och vi är klara.

6 Uppgift 31.12

Compute the integrals $\int_0^1 f(x)\,dx$ of the functions in the previous exercise, except for the last one. Why do you think this one is left out?

Vi rundar av med ytterligare ett par integraler. I c) och d) använder vi oss av variabelsubstitution.

a)

$$\begin{aligned}\int_0^1 a^x\,dx &= \int_0^1 e^{x\ln(a)}\,dx = \left[\frac{1}{\ln(a)}\,e^{x\ln(a)}\right]_0^1 = \frac{1}{\ln(a)}\left(e^{\ln(a)}-1\right)\\ &= \frac{1}{\ln(a)}\,(a-1).\end{aligned}$$

b)

$$\int_0^1 e^{x+1}\,dx = \left[e^{x+1}\right]_0^1 = e^2 - e = e\,(e-1).$$

c)

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\,e^{x^2}\,dx &= \left[\begin{array}{rcl} x^2 &=& t \\ 2x\,dx &=& dt \end{array}\quad \begin{array}{rcl} x=1 &\Leftrightarrow& t=1 \\ x=0 &\Leftrightarrow& t=0 \end{array}\right] = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}\,e^t\,dt = \frac{1}{2}\,\left[e^t\right]_0^1 = \frac{1}{2}\,(e-1),\end{aligned}$$

där vi noterar att även integrationsgränser kan ändras (även om de inte gjorde det här) i samband med variabelbyten. Vi behöver inte återgå till x i slutändan, eftersom uttrycket redan är bestämt.

Givetvis går det även bra att direkt finna en primitiv enligt

$$\int_0^1 x\,e^{x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\,e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\,(e-1)\,,$$

vilket måhända är lite enklare. Ovan fick vi lite extra träning på variabelsubstitution, vilket säkert inte skadar, eller?

d)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^3\, e^{x^2}\, dx &= \left[\begin{array}{rcl} x^2 &=& t \qquad x=1 \;\Leftrightarrow\; t=1 \\ 2x\, dx &=& dt \qquad x=0 \;\Leftrightarrow\; t=0 \end{array}\right] \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}\, t\, e^t\, dt = \{\text{partiell integration}\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[e^t\, t\right]_0^1 - \int_0^1 e^t \cdot 1\, dt\right) = \frac{1}{2}\left(e - \left[e^t\right]_0^1\right) \\
&= \frac{1}{2}\,(e-(e-1)) = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

och vi är klara.

Anledningen till att vi inte kan beräkna integralen över [0, 1] för integranden i e) från förra uppgiften, är att man helt enkelt inte kan uttrycka en primitiv funktion till e^{-x^2}. Vad göra? Kan vi inte beräkna integralen analytiskt, kanske vi kan rå på den numeriskt? Med era MATLAB-program är det gjort i en handvändning (eller rättare sagt efter justeringar i funktionsfilen samt i anropet av huvudprogrammet). Resultatet borde bli 0.746824. Samma integral över hela reella axeln (dvs. från $-\infty$ till ∞) ger svaret $\sqrt{\pi}$.