

97 Egenvärdesproblemet

Vår stabilitetsundersökning bygger på det linjäriserade problemet:

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

där $x(t) \in \mathbf{R}^n$, $u(t) \in \mathbf{R}^m$ är kolonnvektorer och A är en matris av typ $n \times n$ och B av typ $n \times m$. Vi antar att $Bu(t) \equiv 0$.

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Detta är ett system av n stycken kopplade linjära differentialekvationer. Kom ihåg två fall som vi behandlat tidigare.

(a) En enda ekvation $x'(t) = x(t)$ med begynnelsevillkor $x(0) = 1$. Approximationen $X(t_i) = X(t_{i-1}) + hX(t_{i-1})$ konvergerar mot en unik lösning $x(t)$ som vi kallar $\exp(t)$:

$$x(t) = \exp(t).$$

(b) Två ekvationer $\begin{cases} x'_1(t) = x_2(t) \\ x'_2(t) = -x_1(t) \end{cases}$ med begynnelsevillkor $\begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 1, \end{cases}$ dvs

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Approximationen $X(t_i) = X(t_{i-1}) + hAX(t_{i-1})$ konvergerar mot en unik lösning $x(t)$ som vi kallar $\sin(t)$, $\cos(t)$:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Vi betraktar nu ett allmänt system av linjära ordinära differentialekvationer (ODE) med konstanta koefficienter:

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

där $x(t)$ och x_0 är av typ $n \times 1$, A av typ $n \times n$, och där A ej beror på t .

Approximationen $X(t_i) = X(t_{i-1}) + hAX(t_{i-1})$ konvergerar mot en unik lösning $x(t)$, som vi inte har något namn på, men vi ska se att den kan uttryckas med hjälp av \exp , \sin och \cos .

Vi gör följande ansats:

$$x(t) = e^{\lambda t} g = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}.$$

där λ är ett tal och g en vektor. Insättning i differentialekvationen ger:

$$\lambda e^{\lambda t} g = e^{\lambda t} Ag$$

$$Ag = \lambda g \quad (\text{ty } e^{\lambda t} \neq 0)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}_{n \times n} \underbrace{\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}}_{n \times 1} = \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}}_{n \times 1}$$

Detta leder till **egenvärdesproblemet**:

Antag att A är en kvadratisk matris av typ $n \times n$. Finn ett tal λ och vektor $g \neq 0$ sådana att

$$Ag = \lambda g.$$

Obs: nollvektorn $g = 0$ satisfierar visserligen ekvationen, men det ger bara trivial lösning $x(t) = e^{\lambda t}g = 0$ och är därför ointressant.

Sådana λ, g kallas *egenvärde* med tillhörande *egenvektor* till A (kort: e-värde, e-vektor).

Egenvektorekvationen kan skrivas:

$$(A - \lambda I)g = 0 \quad \left(\left(\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Detta är ett homogent linjärt ekvationssystem. Vi kommer ihåg att två fall kan inträffa.

- Fall 1: $\det(A - \lambda I) \neq 0 \Rightarrow$ unik lösning $g = (A - \lambda I)^{-1}0 = 0$, ingen e-vektor,
- Fall 2: $\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow$ icke-trivial lösning $g \neq 0$ (ej unik).

Ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$ är en polynomekvation $p(\lambda) = 0$ av grad n . Algebrans fundamentalsats ger n st rötter $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Vi noterar att

- λ_k är reella eller komplexa tal,
- λ_k kan vara multipelrötter, de räknas då upp så många gånger som multipliciteten anger.

För varje λ_k kan vi sedan lösa $Ag = \lambda_k g$ och hitta en egenvektor $g_k \neq 0$.

Vi har då n st e-värden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ med tillhörande e-vektorer g_1, \dots, g_n .

De satisfierar $Ag_k = \lambda_k g_k$, $k = 1, \dots, n$.

Vi definierar två nya matriser.

Egenvärdesmatrisen:

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (\text{unik så när som på ordningsföljden}).$$

En egenvektormatris:

$$P = [g_1, \dots, g_n] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{ej unik}).$$

De satisfierar

$$AP = A[g_1, \dots, g_n] = [Ag_1, \dots, Ag_n] = [\lambda_1 g_1, \dots, \lambda_n g_n] = PD,$$

dvs

$$\boxed{AP = PD.}$$

Om g_1, \dots, g_n äro linjärt oberoende så är P inverterbar och

$$P^{-1}AP = D, \quad A = PDP^{-1}.$$

Vi säger då att A är *diagonaliserbar*.

Vi återvänder nu till vårt system av ordinära differentialekvationer $x'(t) = Ax(t)$. Vi har hittat n stycken lösningar $x_k(t) = e^{\lambda_k t} g_k$. Varje linjär kombination

$$x(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k t} g_k = c_1 e^{\lambda_1 t} g_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} g_n \quad (c_k \text{ är godtyckliga tal})$$

löser också $x' = Ax$. Om g_1, \dots, g_n är linjärt oberoende fås *alla lösningar* på detta vis, ty då är g_1, \dots, g_n en *bas* för \mathbf{R}^n och lösningen kan skrivas som en linjär kombination av denna bas:

$$x(t) = \sum_{k=1}^n y_k(t) g_k \quad (y_k(t) \text{ är komponenterna för } x(t) \text{ i den nya basen}).$$

Insättning i $x' = Ax$ ger

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_k y'_k(t) g_k &= A \sum_k y_k(t) g_k = \sum_k y_k(t) \underbrace{Ag_k}_{=\lambda_k g_k} = \sum_k \lambda_k y_k(t) g_k \\ \Rightarrow \sum_k (y'_k(t) - \lambda_k y_k(t)) g_k &= 0 \\ \Rightarrow y'_k(t) - \lambda_k y_k(t) &= 0 \quad (\text{ty } g_1, \dots, g_n \text{ är linjärt oberoende}) \\ \Rightarrow x(t) &= \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k t} g_k. \end{aligned}$$

Koefficienterna bestäms av begynnelsevillkoret $x_0 = x(0) = \sum_{k=1}^n c_k g_k$:

$$\Rightarrow c_k \text{ är komponenterna för } x_0 \text{ i e-vektorbasen}$$

Denna koordinattransformation kan också skrivas på matrisform

$$x(t) = Py(t), \quad x_0 = Pc.$$

Exempel 97.1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (symmetrisk!)

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Lös $(A - \lambda I)g = 0$.

$$\begin{aligned}
 1) \lambda_1 = 1, \text{ ansats } g_1 &= \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow b \text{ fri, } b = s, a = b = s &\Rightarrow g_1 = \begin{bmatrix} s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, s \text{ godtyckligt tal.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \lambda_1 = -1, \text{ ansats } g_2 &= \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow b = t, a = -b = -t &\Rightarrow g_2 = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

obs: g_1 och g_2 är *ortogonal*, normera så fås *ON-bas*: $s = t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (vi valde + tecknet)

$$g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad g_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = [g_1, g_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ blir då en ortogonal matris:}$$

$$P^T P = I, \quad P^{-1} = P^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Vi har

$$AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$PD = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

dvs $AP = PD$. Dessutom:

$$P^T AP = D, \quad A = PDP^T.$$

Ekvationen $\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ har lösningen

$$x(t) = \sum_{k=1}^2 c_k e^{\lambda_k t} g_k = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{begynnelsevillkoret ger } x_0 = x(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Multiplitera skalärt med $g_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$:

$$(x_0, g_1) = c_1 \underbrace{(g_1, g_1)}_{=1} + c_2 \underbrace{(g_1, g_2)}_{=0} = c_1$$

$$\Rightarrow c_1 = (x_0, g_1) = g_1^T x_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} = \frac{x_{01} + x_{02}}{\sqrt{2}}$$

På samma vis:

$$c_2 = (x_0, g_2) = g_2^T x_0 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} = \frac{-x_{01} + x_{02}}{\sqrt{2}}$$

Alltså:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}(x_{01} + x_{02})e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(-x_{01} + x_{02})e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_{01} \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) + x_{02} \cdot \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \\ x_{01} \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) + x_{02} \cdot \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$x(t) = x_{01} \begin{bmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{bmatrix} + x_{02} \begin{bmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \end{bmatrix}$$

Stabilitet?

$$\begin{aligned} x(t) &= \underbrace{c_1 e^t}_{\text{växer}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} + \underbrace{c_2 e^{-t}}_{\text{avtar}} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \text{växer om } c_1 \neq 0 \\ &\Rightarrow \text{instabilt system} \end{aligned}$$

Exempel 97.2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ (ej symmetrisk)

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_1 = 2i, \lambda_2 = -2i \quad (\text{komplexa!})$$

$$D = \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix}$$

1) $\lambda_1 = 2i$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2i & 1 \\ -4 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \boxed{2i} \\ \checkmark \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow g_1 = s \begin{bmatrix} 1/(2i) \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} \quad (\text{vi valde } s = 2i) \end{aligned}$$

2) $\lambda_2 = -2i$

$$\begin{bmatrix} 2i & 1 \\ -4 & 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow g_2 = t \begin{bmatrix} -1/(2i) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (\text{vi valde } t = -2i)$$

$$g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix}, \quad g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix}$$

$$(g_1, g_2) = \bar{g}_2^T g_1 = [1 \quad 2i] \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0, \text{ ej ortogonala.}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2i & -2i \end{bmatrix}$$

$$\det(P) = -4i \neq 0, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4i} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{4i} \end{bmatrix}$$

$$AP = PD, \quad A = PDP^{-1}, \quad P^{-1}AP = D$$

Lösningen till $\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ är

$$x(t) = c_1 e^{2it} \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} + c_2 e^{-2it} \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix}$$

Första komponenten är

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^{2it} + c_2 e^{-2it} \\ &= c_1 (\cos(2t) + i \sin(2t)) + c_2 (\cos(2t) - i \sin(2t)) \\ &= (c_1 + c_2) \cos(2t) + i(c_1 - c_2) \sin(2t) \\ &= d_1 \cos(2t) + d_1 \sin(2t), \end{aligned}$$

dvs lösning är en linjär kombination av $\cos(2t)$ och $\sin(2t)$.

Vi har använt formeln (Ch 33)

$$\begin{aligned} e^{it} &= \cos(t) + i \sin(t) \\ e^{-it} &= \cos(t) + i \sin(-t) = \cos(t) - i \sin(t) \end{aligned}$$

Stabilitet?

$$x(t) = c_1 \underbrace{e^{2it}}_{\text{växer ej}} g_1 + c_2 \underbrace{e^{-2it}}_{\text{växer ej}} g_2$$

ty $|e^{\pm 2it}| = 1 \Rightarrow$ stabilt system.

$$\text{Exempel 97.3. } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{1 - 4} = 1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{3}i, \quad \lambda_2 = 1 - \sqrt{3}i$$

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} g_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} g_2 = c_1 e^t e^{\sqrt{3}it} g_1 + c_2 e^t e^{-\sqrt{3}it} g_2$$

Här är $e^t e^{\pm \sqrt{3}it} = e^t (\cos(\sqrt{3}t) \pm i \sin(\sqrt{3}t))$. Detta är en svängning med växande amplitud. Instabilt system.

Exempel 97.4. $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ har dubbelt egenvärde $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ men bara en linjärt oberoende egenvektor $g_1 = g_2 = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (vi valde $s = 1$). Vi får alltså

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad P = [g_1, g_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nu är g_1, g_2 inte linjärt oberoende och P inte inverterbar, och därmed är A inte diagonaliserbar.

Vi betraktar nu det allmänna systemet: $\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ med lösningen

$$x(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k t} g_k$$

Vi antar att g_1, \dots, g_n är linjärt oberoende. Då är c_k komponenterna av x_0 i e-vektorbasen g_1, \dots, g_n .

Vi skriver $\lambda_k = \alpha_k + i\omega_k$. Två fall:

- 1) $\lambda_k = \alpha_k$ reellt egenvärde
 $e^{\lambda_k t} = e^{\alpha_k t}$ är *konstant, växande* respektive *avtagande* beroende på om $\alpha_k = 0$, $\alpha_k > 0$ eller $\alpha_k < 0$.
- 2) $\lambda_k = \alpha_k + i\omega_k$ komplext egenvärde
 $e^{\lambda_k t} = e^{\alpha_k t} e^{i\omega_k t} = e^{\alpha_k t} (\cos(\omega_k t) + i \sin(\omega_k t))$ är en svängning med *konstant, växande* respektive *avtagande* amplitud beroende på om realdelen $\alpha_k = 0$, $\alpha_k > 0$ eller $\alpha_k < 0$.

Vi säger att systemet $\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ är *stabil* om $x(t)$ är *liten* för *alla* val av små begynnelsestörningar x_0 (dvs c_k).

Systemet är *instabil* annars, dvs om $x(t)$ blir stor för *något* val av liten begynnelsestörning x_0 , dvs om $x(t)$ växer.

Dessutom: systemet är *asymptotiskt stabilt* om $x(t) \rightarrow 0$ då $t \rightarrow \infty$ för alla x_0 .

$$\begin{aligned} \text{Systemet instabil} &\Leftrightarrow \text{någon } \alpha_k = \text{Re}\lambda_k > 0 \\ \text{Asymptotiskt stabilt} &\Leftrightarrow \text{alla } \alpha_k = \text{Re}\lambda_k < 0 \end{aligned}$$

Svårare att ge precist villkor för stabilitet. Läs "Dynamiska system" sid 1–7.

I MATLAB/Octave:

```
>> eig(A)
```

ger endast egenvärdena, medan

```
>> [P,D]=eig(A)
```

ger både e-värdesmatrisen D och en e-vektormatris P .

Övningar

97.1. Lös egenvärdesproblemet för matrisen A i följande fall. Bestäm en ortogonal egenvektormatris om möjligt. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ Avgör systemets stabilitet. Räkna först för hand. Använd sedan MATLAB/Octave.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

Svar

97.1.

(a) $D = \text{diag}(-2, 5) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ (ej ortogonal), instabilt.

(b) $D = \text{diag}(5, 10) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$, $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (ortogonal), instabilt.

(c) $D = \text{diag}(0, 9, 9) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ (ej ortogonal), eller $P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}$
(ortogonal), instabilt.

2004-01-25 /stig