Lösningar till TMA195 samt TMA750 (ht-99 studenter) 010303

.

2. Triangeln, som vi kan kalla T utgör ett slutet och begränsat område och f är Lipschitzkontinuerlig på T så f antar största och minsta värde på T. Dessa återfinns i stationära punkter, $\nabla f = 0$, i T eller i punkter på randen till T.

Stationära punkter i T saknas ty $f'_{x_2} = -2 \neq 0$.
Randen:
(1) $x_2 = 0$, $0 \leq x_1 \leq 2$ med $f = f(x_1, 0) = x_1^2 - 6x_1 + 10$. $f'_{x_1} = 2x_1 - 6 = 0$ då $x_1 = 3$, men $(3, 0)$ ligger utanför T. Kandidater i ändpunkterna $(0, 0)$ och $(2, 0)$.

(2) $x_1 = 0$, $0 \leq x_2 \leq 4$ med $f = f(0, x_2) = -2x_2 + 10$. $f'_{x_2} = -2 \neq 0$. Kandidater i ändpunkterna $(0, 0)$ och $(0, 4)$.

(3) $2x_1 + x_2 = 4$ med $f(x_1, 4 - 2x_1) = x_1^2 - 2x_1 + 2$. $f'_{x_1} = 2x_1 - 2 = 0$ då $x_1 = 1$. Ny kandidat $(1, 2)$.

Jämförelse av funktionsvärden ger $f_{max} = 10$ i $(0, 0)$ och $f_{min} = 2$ i $(1, 2)$.

3. (a) Ytan S parametriseras som $S : s(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \sqrt{x_1^2 + x_2^2})$, med $(x_1, x_2) \in \Omega : x_1^2 + x_2^2 \leq R^2$. Arean ges av

$$A = \int_S ds = \int_\Omega \|s'_{x_1} \times s'_{x_2}\| dx = \int_\Omega \sqrt{2} dx = \sqrt{2}\pi R^2.$$

(b) Randen Γ parametriseras som $\Gamma : s(t) = (R\cos t, R\sin t, R)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ vilket ger

$$\int_\Gamma F \cdot ds = \int_0^{2\pi} F(s(t)) \cdot s'(t) dt = \int_0^{2\pi} R^2 dt = 2\pi R^2.$$

Alternativt kan man använda Stokes sats, vilket ger

$$\int_\Gamma F \cdot ds = \int_S (\nabla \times F) \cdot n ds = \int_\Omega (\nabla \times F) \cdot (s'_{x_1} \times s'_{x_2}) dx = \int_\Omega 2 dx = 2\pi R^2.$$

5. Variabelbytet $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_2/x_1$ ger integrationsområdet $D = [0, 2] \times [0, 1]$ i $y_1 y_2$-planet och Jacobianen $x_1^2/(x_1 + x_2)$. Således

$$\int_\Omega f(x) dx = \int_D e^{y_1} dy = e^2 - 1.$$