Tappade trådar 1

Energikonservering: Betraktar *vågekvationen*

$$c\,\ddot{u} - \nabla\cdot a\,\nabla u = 0 \quad \text{i } \Omega,$$

med $c = c(x) > 0$ och $a = a(x) > 0$, och med randvillkoret $\partial_n u = 0$ på Γ. Multiplikation med $\dot{u}$ och integration över Ω ger

$$\begin{aligned} 0 = \int_\Omega \dot{u}\,(c\,\ddot{u} - \nabla\cdot a\,\nabla u) &= \int_\Omega \dot{u}\,c\,\ddot{u} + \nabla\dot{u}\cdot a\,\nabla u \\ &= \tfrac{d}{dt}\big(\tfrac{1}{2}\int_\Omega c\,\dot{u}^2 + \tfrac{1}{2}\int_\Omega a\,|\nabla u|^2\big), \end{aligned}$$

dvs den totala energin, dvs summan av *kinetiska energin* $\frac{1}{2}\int_\Omega c\,\dot{u}^2$ och *potentiella energin* $\frac{1}{2}\int_\Omega a\,|\nabla u|^2$, är tidsoberoende.

Tappade trådar 2

Energikonservering för cG1:

Har redan noterat i numeriskt exempel att cG1 verkar konservera energin. Erinrar oss att cG1 för det givna problemet reduceras till

$$\begin{cases} M\,(U_n - U_{n-1}) - \frac{k}{2}\,M\,(V_{n-1} + V_n) = 0 \\ M\,(V_n - V_{n-1}) + \frac{k}{2}\,A\,(U_{n-1} + U_n) = 0. \end{cases}$$

Om vi subtraherar den den första ekvationen multiplicerad med $V_n - V_{n-1}$ från den andra multiplicerad med $U_n - U_{n-1}$ erhålls

$$\frac{k}{2}\,(U_n - U_{n-1})^\top A\,(U_{n-1} + U_n) + \frac{k}{2}\,(V_n - V_{n-1})^\top M\,(V_{n-1} + V_n) = 0.$$

Tappade trådar 3

Om vi nu utnyttjar att M och A är *symmetriska* matriser, så att $V^\top M\,U = U^\top M\,V$ och $V^\top A\,U = U^\top A\,V$, och delar med k, så erhålls

$$\frac{1}{2}\,U_n\,A\,U_n + \frac{1}{2}\,V_n\,M\,V_n = \frac{1}{2}\,U_{n-1}\,A\,U_{n-1} + \frac{1}{2}\,V_{n-1}\,M\,V_{n-1},$$

dvs

$$\frac{1}{2}\int_\Omega a\,|\nabla U_n|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega c\,V_n^2 = \frac{1}{2}\int_\Omega a\,|\nabla U_{n-1}|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega c\,V_{n-1}^2,$$

vilket uttrycker att totala energin är densamma vid tiden t_n som vid t_{n-1}, dvs energikonservering.

Tappade trådar 4

Dämpad vågekvation: Jämför med ekvationen

$$c\,\ddot{u} + d\,\dot{u} - \nabla\,\cdot\,a\,\nabla u = 0,$$

med $d = d(x) > 0$ där multiplikation med $\dot{u}$ och integration ger

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\int_\Omega c\,\dot{u}^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega a\,|\nabla u|^2\Big) = -\int_\Omega d\,\dot{u}^2 < 0,$$

där energin avtar med tiden p.g.a. den hastighetsberoende dämpande kraften representerad av termen $d\,\dot{u}$.

Tappade trådar 5

Vi erinrar oss att för att beräkna U_n och V_n ur cG1 systemet föt (den odämpade) vågekvationen (med $f = 0$) måste vi forma *blockmatrisekvationen*

$$\begin{bmatrix} M & -\frac{k}{2}\,M \\ \frac{k}{2}\,A & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & +\frac{k}{2}\,M \\ -\frac{k}{2}\,A & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{n-1} \\ V_{n-1} \end{bmatrix}$$

och härifrån lösa ut $[U_n\ V_n]^\top$.

Tappade trådar 6

Vi noterar att cG1 i detta fall sammanfaller med CN, baserad på trapetsregeln, eller mittpunktskvadratur, och kan skrivas

$$\begin{cases} M\,U_n = M\,U_{n-1} + \frac{k}{2}\,M\,(V_{n-1} + V_n) \\ M\,V_n = M\,V_{n-1} - \frac{k}{2}\,A\,(U_{n-1} + U_n). \end{cases}$$

En “fuskmetod” för att få fram en lösning med liknande egenskaper är följande, ofta kallad *Heuns* metod, eller *improved Euler*:

Tappade trådar 7

Vi betraktar för enkelhets skull modellekvationen $\dot{u} = f(u)$, som vi ju efter tidsintegration även skrivit på integralform som

$$u_n - u_{n-1} = \int_{I_n} f(u(t))\,dt,$$

och för vilken den resulterande metoden dessutom blir helt explicit.

Tappade trådar 8

Idén med metoden är helt enkelt att med hjälp av ett “halvt explicit Eulersteg” skaffa en hygglig approximation av mittpunktsvärdet på det aktuella tidsintervallet av den sökta lösningen, dvs beräkna

$$\tilde{u}_{n-\frac{1}{2}} = u_{n-1} + \frac{k}{2}\,f(u_{n-1}),$$

och sedan utgående från integralapproximationen

$$u_n - u_{n-1} = \int_{I_n} f(u) \approx k\,f(u_{n-\frac{1}{2}}),$$

beräkna

$$\tilde{u}_n = u_{n-1} + k\,f(\tilde{u}_{n-\frac{1}{2}}).$$

Tappade trådar 9

Newtons metod: Har sett att implicit Euler tillämpad på det ickelinjära problemet

$$\dot{u} - \nabla \cdot a \nabla u = f(u) \quad \text{i } \Omega,$$

med $a = a(x)$ och med randvillkor $-a\,\partial_n u = 0$ på Γ, leder till tidsstegning som kräver lösning av det ickelinjära ekvationssystemet

$$M\,U_n + k\,A\,U_n = M\,U_{n-1} + k\,F(U_n),$$

där lastvektorn F har element $\int_\Omega \phi_i\, f(U_n)$.

Tappade trådar 10

För att lösa detta system med Newtons metod skriver vi det först på $=0$-formen

$$G(U) = M\,U + k\,A\,U - M\,U_{n-1} - k\,F(U) = 0,$$

där alltså $U = U_n$. Vi erinrar oss att Newtons metod från lämplig starvektor, här t.ex. $U^{(0)} = U_{n-1}$, går ut på att succesivt beräkna $U^{(j+1)}$ från $U^{(j)}$ som $U^{(j+1)} = U^{(j)} + W$ där W lösningen till

$$G'(U)\,W = -G(U),$$

där $U = U^{(j)}$, och där matrisen $G'(U)$ är motsvarande Jacobian.

Tappade trådar 11

Vi finner direkt att $G'(U) = M + k\,A - k\,F'(U)$. Betraktar för enkelhets skull det konkreta fallet $f(u) = u - u^3$ med komponent i av vektorn $F(U)$ given av

$$\int_\Omega \phi_i\,(U - U^3).$$

Gradienten, dvs de partiella derivatorna med avseende på de olika nodvärdena U_k i $U(x) = U_1\,\phi_1(x) + .. + U_m\,\phi_m(x)$, ges nu av

$$\int_\Omega \phi_i\,(1 - 3\,U^2)\,\phi_k,$$

dvs samma som i den viktade massmatrisen M_c med $c = 1 - 3\,U^2$.

Tappade trådar 12

Implementering: Matlabkod för Newtons metod skulle kunna ta formen

```
while time < finaltime
 Uold = U;
 time = time + k;
 U = Uold;
 % first guess  W = ones(size(U));
 while max(abs(W)) > NewtonTolerance
  FU = MyLoadVectorAssembler(p,t,e,f,U);
  G = M*U + k*A*U - k*M*Uold - k*FU;
  DF = MyFJacobianAssembler(p,t,e,df,U);
  W = (M+k*A-k*DF)\(-G);
  U = U + W;
 end;
end
```

Tappade trådar 13

Stationära lösningar: Med en *stationär* lösning menas här en *tidsoberoende* sådan. Om vi t.ex betraktar ekvationen

$$\dot{u} - \nabla \cdot a \nabla u = u - u^3 \quad \text{i } \Omega,$$

med randvillkor $-a\,\partial_n = 0$ på Γ, så satisfierar en stationär lösning, dvs med $\dot{u} = 0$, motsvarande *stationära ekvation*

$$-\nabla \cdot a \nabla u = u - u^3 \quad \text{i } \Omega,$$

och uppfyller randvillkoren $-a\,\partial_n u = 0$ på Γ. Har noterat att detta problem har åtminstone 3 stationära lösningar, varav 2 *stabila*, nämligen $u = \pm 1$, och den *instabila* $u = 0$.

Tappade trådar 14

Lösningar till ekvationer med tidsoberoende data blir i regel med tiden “allt mer” *stationära*, dvs beroende på graden av *dissipation*, dvs dämpning i det givna problemet, blir varje lösning med tiden mer eller mindre *stationär*. Ett naturligt sätt att beräkna stationär lösningar till en given ekvation kan därför vara att lösa motsvarande tidsberoende problem (med godtyckligt valda begynnelsevillkor) och sedan lösa problemet under lång tid, dvs tills den *transienta* fasen klingat bort (i tillräcklig grad). För detta ändamål är det förstås lämpligt att använda *långa tidssteg* och en metod som t.ex. *implicit Euler*.

Tappade trådar 15

Vi kan studera detta t.ex. med hjälp av problemet

$$c\,\ddot{u} + d\,\dot{u} - \nabla \cdot a \nabla u = f \quad \text{i } \Omega,$$

med randvillkor $-a\,\partial_n u = \gamma\,(u - g_D) + g_N$. Om bara graden av dämpning, dvs d är tillräckligt stor i förhållande till c och a, och alla data c, a, f, γ, g_D och g_N är tidsoberoende, kommer lösningen oberoende av valda initialdata för u och $\dot{u}$ vid tiden $t = 0$ relativt snabbt att närma sig ett stationärt tillstånd.
Om däremot $d << 1$ eller i extremfallet $d = 0$, och/eller alla data inte är tidsoberoende kan vi föstås inte vänta oss detta scenario.

Tappade trådar 16

Vissa typer av problem saknar (stabila, dvs realiserbara) stationära lösningar. Dvs de har delvis samma karaktär som den odämpade våg ekvationen med *tidsperiodiska* lösningar.

Tappade trådar 17

Tidsperiodiska data: För *tidsperiodiska* data kan det vara naturligt att ansätta en lösning med *samma* typ av tidsperiodicitet. Om t.ex. värmeproduktionen i ett värmeledningsproblem ges av $f(x,\, t) = \sin(\omega\, t)\, g(x)$ kan det vara skäl att anta att lösningen, i alla fall efter viss tid, uppvisar en likadan tidsvariation, dvs på formen $u(x,\, t) = \sin(\omega\, t)\, v(x)$. Insättning i värmeledningsekvationen

$$c\,\dot{u} - \nabla \cdot a\,\nabla u = f$$

ger

$$c\,\omega \sin(\omega\, t)\, v - \sin(\omega\, t)\, \nabla \cdot a\,\nabla v = \sin(\omega\, t)\, g,$$

Tappade trådar 18

dvs

$$c\,\omega\, v - \nabla \cdot a\,\nabla v = g,$$

där vi förkortat bort tidsfaktorn $\sin(\omega\, t)$. Ekvationen kallas *Helmholz ekvation*. Tillsamman med givna randvillkor ger detta en lösning $v = v(x)$ sådan att motsvarande $u(x, t) = \sin(\omega\, t)\, v(x)$ löser den givna tidsberoende ekvationen med randvillkor. Data c och a i ekvationen, samt data i randvillkoret har här antagits vara tidsoberoende.

Tappade trådar 19

Resonans: Vissa (vinkel)frekvenser ω i tidsfaktorn $\sin(\omega\, t)$ i f kan ge upphov till *resonans*, dvs att lösningen u “gärna” vill svänga i samma takt. De vinkelfrekvenser för vilka detta kan vara aktuellt ges som bekant av problemets *egenvärden*, dvs tal λ för vilka motsvarande *homogena* ekvation

$$c\,\lambda\, w - \nabla \cdot a\,\nabla w = 0,$$

med samma randvillkor, har lösningar $w \neq 0$, och motsvarande lösningar till det givna tidsberoende problemet kommer att innehålla komponeneter med tidsfaktorer av typen $t \sin(\omega\, t)$ som växer i amplitud med tiden.