Navier-Stokes 1

Materiederivatan: Betrakta ett *flöde* med *hastighet* $u = u(x, t)$, och en punkt med koordinat $x = x(t)$ som “transporteras med flödet”, dvs med

$$x'(t) = u(x(t),\, t),$$

dvs punktens *hastighet* $x'(t)$ är densamma som flödets (lokala) hastighet $u = u(x(t),\, t)$.

Navier-Stokes 2

Låt sedan $w = w(x,\, t)$ vara en “storhet” (som t.ex. temperaturen, en koncentration, eller en komponent i hastighetsfältet u) som transporteras med flödet. Vi är nu intresserade av derivatan m.a.p. t av $w = w(x(t),\, t)$ i en punkt $x = x(t)$ som följer med flödet som ovan, dvs med $x' = u$. Detta ger

$$\frac{d}{dt} w(x(t),\, t) = \nabla w \cdot \underbrace{x'}_{=u} + \dot{w} = \dot{w} + (u \cdot \nabla)\, w = \dot{w} + \partial_u w.$$

Navier-Stokes 3

Speciellt ger detta tillämpat på hastighetskomponenterna u_i av $u = (u_1,\, u_2,\, u_3)$,

$$\frac{d}{dt} u_i = \dot{u}_i + (u \cdot \nabla)\, u_i = \dot{u}_i + \partial_u\, u_i \quad i = 1,\, 2,\, 3,$$

dvs på vektorform

$$\frac{d}{dt} u = \dot{u} + (u \cdot \nabla)\, u = \dot{u} + \partial_u\, u.$$

Denna derivata kallas *totala derivatan* m.a.p. t, eller *materiederivatan*.

Navier-Stokes 4

Kraftbalans enl Newton: Vi noterar att den totala derivatan m.a.p. t av just *hastigheten* u är (den lokala) *accelerationen* av flödet, och att $\rho\, \frac{d}{dt} u = \rho\, (\dot{u} + (u \cdot \nabla)\, u)$, där ρ är *densiteten*, är *tröghetskraften*, som enligt Newton balanserar övriga verkande krafter:

$$\rho\, (\dot{u} + (u \cdot \nabla)\, u) = f + \nabla \cdot \sigma,$$

där $f = f(x, t)$ är yttre krafter, och σ är den s.k. *spänningstensorn*, dvs σ är matrisen vars element $\sigma_{i,j}$ är kraft i koordinatriktning i per ytenhet på en yta med normal i koordinatriktning j, och vars divergens alltså representerar “inre” friktions och tryckkrafter.

Navier-Stokes 5

Masskonservering: Betrakta en fix (oberoende av t) volym V med rand ∂V. Enligt principen om *masskonservering* gäller

$$\int_V \dot\rho = \frac{d}{dt}\int_V \rho = -\int_{\partial V} \rho\, u\cdot n = -\int_V \nabla\cdot(\rho\, u),$$

dvs

$$\int_V \dot\rho + \nabla\cdot(\rho\, u) = 0,$$

dvs, eftersom V kan väljas godtyckligt,

$$\dot\rho + \nabla\cdot(\rho\, u) = 0.$$

Navier-Stokes 6

Om fluiden är *inkompressibel*, dvs ρ är konstant (längs strömningslinjerna definierade av $x' = u$) följer nu att

$$\underbrace{\dot\rho + (u\cdot\nabla)\rho}_{=0} + \rho\,\nabla\cdot u = 0,$$

dvs

$$\nabla\cdot u = 0,$$

dvs hastighetsfältet $u = (u_1,\, u_2,\, u_3)$ är *divergensfritt*.

Navier-Stokes 7

Newtons ekvationer för kraftbalans tar alltså formen

$$\rho\,(\dot u + (u\cdot\nabla)\,u) = f + \nabla\cdot\sigma,$$

där σ är *spänningstensorn* som kan separeras i en normalspänningsdel bestående av ett *tryck* p och en tangentialspänningsdel $\bar\sigma$, och skrivas som $\sigma = -p\,I + \bar\sigma$, där I är enhetsmatrisen, dvs vi erhåller så *Navier-Stokes* ekvationer för inkompressibel strömning bestående av 4 ekvationer för de 4 obekanta $u = (u_1,\, u_2,\, u_3)$ och p:

$$\begin{aligned}&\rho\,(\dot u + (u\cdot\nabla)\,u) = f - \nabla p + \nabla\cdot\bar\sigma,\\ &\nabla\cdot u = 0,\end{aligned}$$

där det återstår att precisera formen på $\bar\sigma$, samt att ställa upp lämpliga *randvillkor* och *begynnelsevillkor*.

Navier-Stokes 8

Begynnelsevillkor: Dessa tar formen $u(x,0) = u_0(x)$ för $x \in \Omega$, där Ω är det *område* i vilken fluiden är innesluten.

Randvillkor: Låt $\Gamma = \partial\Omega$ vara områdets rand. Längs en (stationär) fast rand bör gälla, p.g.a. viskösa krafter, att $u = 0$. Längs ett givet *inflöde* kan man tänka sig att u är känd och given, med $u\cdot n < 0$. Längs ett givet *utföde* tänker vi oss snarare att *normalkomponeneten av spänningarna* i flödet är $= 0$.

Navier-Stokes 9

Spänningstensorn: För en inkompressibel Newtonskt fluid antas att

$$\bar{\sigma} = \mu\, \epsilon(u) \quad \epsilon(u)_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i},$$

där $\mu > 0$ är *viskositeten*, som vi här antar vara konstant. En direkt räkning visar att

$$\nabla \cdot \epsilon(u) = \nabla \cdot \nabla u + \underbrace{\nabla \cdot u}_{=0}\, u,$$

dvs p.g.a. inkompressibiliteten reduceras alltså Navier-Stokes ekvationer till

$$\rho\,(\dot{u} + (u \cdot \nabla)\, u) + \nabla p - \mu \nabla \cdot \nabla u = f,$$
$$\nabla \cdot u = 0.$$