Navier-Stokes 1

Har sett att *Navier-Stokes* ekvationer för *inkompressibel* strömning tar formen

$$\begin{cases} \rho\,(\dot u + (u\cdot\nabla)\,u) + \nabla p - \mu\,\Delta u = f, \\ \nabla\cdot u = 0, \end{cases}$$

där ρ är densiteten, $u = (u_1,\, u_2,\, u_3)$ *hastigheten*, p är *trycket*, μ viskositeten, och f yttre kraft, och där den första (vektor-)ekvationen uttrycker *kraftbalans*, och den andra (skalära) ekvationen uttrycker *masskonservering*.

Navier-Stokes 2

Till detta kommer begynnelsevillkor $u(x,\,0) = u_0(x)$ i Ω och randvillkor $u = 0$ längs fast rand, $u = g$ vid (givet) *inföde*, och $\sigma\cdot n = 0$ eller $\partial_n u = 0$ längs *utflödesrand*, där n är yttre enhetsnormal till randen, och $\sigma = -p\,I + \bar\sigma$ är spänningstensorn, med $\bar\sigma = \mu\,\epsilon(u)$ och $\epsilon(u) = (\frac{\partial u_i}{\partial x_j})$ om $\nabla\cdot u = 0$.

Till frågan om *randvillkor för trycket* p får vi anledning att återkomma nedan.

Navier-Stokes 3

Vorticitet / strömningsfunktion: En alternativ formulering av Navier-Stokes ekvationer erhålls genom att istället för u och p söka *vorticiteten*, dvs $\omega = \nabla\times u$, och en *strömningfunktion* dvs en "vektorpotential" $\psi = (\psi_1,\,\psi_2,\,\psi_3)$ för u, sådan att $u = \nabla\times\psi$. En finess med detta är att kontinuitetsekvationen $\nabla\cdot u$ då blir automatiskt uppfylld, eftersom $\nabla\cdot\nabla\times\psi = 0$ för *alla* funktioner ψ. Vi erinrar oss att

$$\nabla\times\psi = (\partial_2\,\psi_3 - \partial_3\,\psi_2,\ \partial_3\,\psi_1 - \partial_1\,\psi_3,\ \partial_1\,\psi_2 - \partial_2\,\psi_1),$$

vilket i 2D reduceras till $\nabla\times\psi = (\partial_2\,\tilde\psi,\,-\partial_1\,\tilde\psi)$, där $\tilde\psi = \psi_3$, dvs strömningsfunktionen kan i 2D ses som skalär. Vi ser direkt från definitionen av $\nabla\times\psi$ att $\nabla\cdot\nabla\times\psi = 0$, eftersom $\partial_i\,\partial_j\,\psi = \partial_j\,\partial_i\,\psi$ för alla $i,\,j$.

Navier-Stokes 4

Om vi för ett ögonblick tänker oss att vi känner vorticiteten $\omega = \nabla\times u$, så skulle ψ kunna beräknas genom att lösa (den Poissonliknande) ekvationen

$$\nabla\times\underbrace{\nabla\times\psi}_{=u} = \omega.$$

I fallet med två rumsdimensioner reduceras denna ekvation till just Poissons ekvation:

$$\nabla\times\nabla\times\tilde\psi = \nabla\times(\partial_2\,\tilde\psi,\,-\partial_1\,\tilde\psi,\,0) = (0,\,0,\,-\Delta\tilde\psi) = (0,\,0,\,\omega),$$

dvs

$$-\Delta\tilde\psi = \omega.$$

Navier-Stokes 5

För att erhålla en ekvation för vorticiteten ω applicerar vi helt enkelt $\nabla\times$ på hastighetsekvationerna, vilket ger

$$\underbrace{\nabla\times\dot{u}}_{=\dot{\omega}}+\nabla\times(u\cdot\nabla)\,u+\underbrace{\nabla\times\nabla p}_{=0}-\mu\underbrace{\nabla\times\Delta u}_{=\Delta\,\omega}=\underbrace{\nabla\times f}_{=:f_\omega},$$

där i 2D fallet, för *divergensfritt* $u=(u_1,\,u_2)$,

$$\begin{aligned}&\nabla\times\;(u\cdot\nabla)\,u=\partial_2\,(u\cdot\nabla)\,u_1-\partial_1\,(u\cdot\nabla)\,u_2\\&=\underbrace{0}_{!}+(u\cdot\nabla)\,\underbrace{(\partial_2\,u_1-\partial_1\,u_2)}_{=\omega}.\end{aligned}$$

Navier-Stokes 6

Kalkylen bygger på att

$$\partial_2\,u_1\;\underbrace{\partial_1\,u_1}_{=-\partial_2\,u_2}+\partial_2\,u_2\,\partial_2\,u_1-(\partial_1\,u_1\,\partial_1\,u_2+\partial_1\,u_2\;\underbrace{\partial_2\,u_2}_{=-\partial_1\,u_1})=0.$$

I 2D-fallet erhålls alltså följande alternativa (ω,ψ)-formulering av Navier-Stokes ekvationer:

$$\begin{cases}\dot{\omega}+(u\cdot\nabla)\,\omega-\mu\,\Delta\omega=f_\omega,\\-\Delta\psi=\omega,\end{cases}$$

där $u=\nabla\times\psi$.

För 3D-fallet finns en motsvarande kalkyl där dock tillkommer en “nollte” ordningens ω-term ($=0$ i 2D-fallet.)

Navier-Stokes 7

Vi återgår nu till att betrakta $(u,\,p)$-formuleringen av Navier-Stokes ekvationer, och antar för enkelhets skull att $\rho=1$, dvs

$$\begin{cases}\dot{u}+(u\cdot\nabla)\,u+\nabla p-\mu\,\Delta u=f,\\\nabla\cdot u=0,\end{cases}$$

och tänker oss först den enklaste typen av randvillkor $u=0$ på $\Gamma=\partial\Omega$.

Navier-Stokes 8

Vi noterar att med ett *givet tryck* reduceras hastighetsekvationerna till formen

$$\dot{u}+(b\cdot\nabla)\,u-\nabla\cdot a\,\nabla u=\tilde{f},$$

med $b=u$, $a=\mu$ och $\tilde{f}=f-\nabla p$, dvs till samma typ av konvektions-diffusions-reaktionsekvation som vi redan behandlat. Enda skillnaden är att konvektionenskoefficienten b nu inte är given utan en del av lösningen. Vid tidsstegning kan vi dock hantera detta med iteration som tidigare.

Navier-Stokes 9

Randvillkoret $u = 0$ kan vi implementera “starkt”, genom att helt enkelt låsa randvärdena till 0, eller “svagt” genom att istället släppa randvärdena fria och istället betrakta randvillkoret

$$-a\,\partial_n u = \gamma\,(u - g_D) + g_N$$

med $a = \mu$, $g_D = 0$, $g_N = 0$ och $\gamma >> 1$.

Navier-Stokes 10

Hur bestämma p?: En (heuristisk) metod bygger på idén att använda en modifiera kontinuitetsekvation på formen

$$\nabla \cdot u = \delta \Delta p, \quad \text{dvs} \quad -\Delta p = -\frac{1}{\delta} \nabla \cdot u,$$

med lämpligt δ. Det är här naturligt att välja $\delta > 0$, eftersom en positiv divergens hos u då kommer att resultera i en trycklösningen med $\Delta p > 0$, dvs “lokalt undertryck”, vilket rimligen bör motverka tendens till divergerande hastighetsfält och därför ha en stabiliserande verkan.

Navier-Stokes 11

Analogt ger ett “konvergerande” hastighetsfält (negativ divergens) upphov till ett lokalt övertryck vilket via hastighetsekvationerna kommer att motverka tendensen till negativ divergens.
För att hastighetsfältet skall bli (nästan) divergensfritt bör den motverkande tryckresponsen vara stark vilket kan åstadkommas genom att välja $\delta << 1$.

Navier-Stokes 12

Randvillkor för trycket: För att en entydigt bestämd trycklösning ska kunna beräknas måste den givna Poissonekvationen kompletteras med lämpliga *randvillkor*. Detta är ett klassiskt problem vars mest naturliga lösning verkar vara att sätta $\partial_n p = n \cdot \nabla p = 0$ på randen.

Navier-Stokes 13

Med detta val blir dock inte trycket entydigt bestämt. För att "filtrera bort" osäkerheten om "nivån" på trycket kan man t.ex. låsa fast det (till valfritt värde) i valfri punkt, eller stabilisera genom att ersätta ekvationen för trycket med

$$-\Delta p + \epsilon p = -\frac{1}{\delta}\,\nabla \cdot u,$$

med $0 < \epsilon << 1$, eller randvillkoret med

$$-\partial_n p = \gamma\, p,$$

med $0 < \gamma << 1$ (och $g_D = g_N = 0$).

Navier-Stokes 14

Diskretisering: För beräkning av hastighetsfält och tryck vid tiden t_n ansätts

$$U_n(x) = U_{n,1}\,\phi_1(x) + .. + U_{n,m}\,\phi_m(x)$$

och

$$P_n(x) = P_{n,1}\,\phi_1(x) + .. + P_{n,m}\,\phi_m(x),$$

där $\phi_j(x)$ är de vanliga basfunktionerna för rummet av styckvis linjära funktioner på en given *partition* av området Ω i triangelelement eller tetraedrar.

Navier-Stokes 15

Vi söker så U_n och P_n sådana att

$$\int_\Omega \phi_i\,(U_n - U_{n-1}) + k\,\phi_i\,(U_n \cdot \nabla)\,U_n + k\,\mu\,\nabla\phi_i \cdot \nabla U_n = \int_\Omega \phi_i \tilde{f}_n,$$

för $i = 1, .., m$, där $\tilde{f}_n = f_n - \nabla P_n$, och där en motsvarande randmatris tillkommer om randvillkoren implementeras svagt. För trycket fås

$$\int_\Omega \nabla\phi_i \cdot \nabla P_n + \epsilon\,\phi_i\,P_n = \frac{1}{\delta}\int_\Omega \phi_i \nabla \cdot U_n, \quad i = 1, .., m.$$

Navier-Stokes 16

Resulterande ekvationssystem: Med de sökta nodvärdena samlade i kolonnvektorer $U_n = [U_{n,1} .. U_{n,m}]^\top$ och $P_n = [P_{n,1} .. P_{n,m}]^\top$ reduceras hastighetsekvationerna till

$$M_1(U_n - U_{n-1}) + k\,B_{U_n} U_n + k\,A_\mu U_n = k\,F_n,$$

där M_w betecknar massmatrisen med vikt w, dvs med element $\int_\Omega \phi_i\,w\,\phi_j$, A_w motsvarande styvhets/diffusionsmatris med element $\int_\Omega \nabla\phi_i \cdot w\nabla\phi_j$, B_w konvektionsmatrisen med element $\int_\Omega \phi_i\,(w \cdot \nabla)\phi_j$, och F_n vektorn med element $\int_\Omega \phi_i \tilde{f}_n$, vari $\int_\Omega \phi_i \nabla P_n$-delen med fördel kan beräknas m.h.a. $B_{(1,0)} P_n$ och $B_{(0,1)} P_n$.

Navier-Stokes 17

Analogt reduceras tryckekvationen till

$$(A_1 + M_\epsilon)P_n = \frac{1}{\delta}\,(B_{(1,0)}U_{1,n} + B_{(0,1)}U_{2,n}),$$

där $U_{1,n}$ och $U_{2,n}$ förstås betecknar 1:a resp 2:a komponenterna i hastighetsvektorn U_n.

Navier-Stokes 18

Eftersom ekvationen för U_n beror på P_n och ekvationen för P_n i sin tur beror på U_n måste vi hitta lämpligt sätt att *iterera* fram en lösning.
En möjlighet ges av följande:

$$M_1(U_n^{(j+1)} - U_{n-1}) + k\,B_{U_n^{(j)}}U_n^{(j+1)} + k\,A_\mu U_n^{(j+1)} = k\,F_n^{(j)}$$
$$(A_1 + M_\epsilon)P_n^{(j+1)} = \tfrac{1}{\delta}\,(B_{(1,0)}U_{1,n}^{(j+1)} + B_{(0,1)}U_{2,n}^{(j+1)}),$$

för $j = 0, 1, ..,$ med $F_n^{(j)}$ beräknad utgående från $P_n^{(j)}$, där $P_n^{(0)} = P_{n-1}$ och $U_n^{(0)} = U_{n-1}$.

Navier-Stokes 19

En konsistent tryckekvation: En konsistent tryckekvation av Poissontyp kan erhållas genom att ta divergensen av hastighetsekvationerna vilket för divergensfritt u ger:

$$\underbrace{\nabla\cdot\dot{u}}_{=0} + \nabla\cdot(u\cdot\nabla)\,u + \underbrace{\nabla\cdot\nabla p}_{=Deltap} - \mu\underbrace{\nabla\cdot\Delta u}_{=0} = \nabla\cdot f,$$

dvs

$$-\Delta p = \nabla\cdot(u\cdot\nabla)\,u - \nabla\cdot f,$$

där i 2D-fallet, för divergensfritt u,

$$\nabla\cdot(\overbrace{u_1\frac{\partial}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial}{\partial x_2}}^{u\cdot\nabla})\,u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}.$$