TMA 690 Partiella differentialekvationer F3, 2002-01-15, lösningar

===

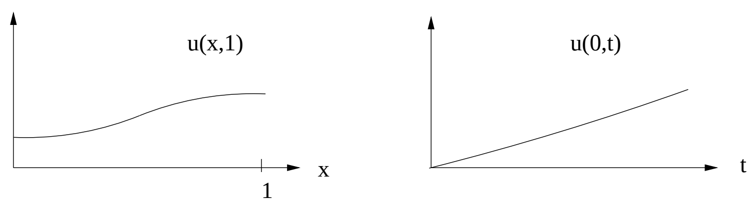
1. a) Se föreläsningsant eller bok. cG1cG1-ansatsen $U(x,t) = U_{n-1}(x)\psi_{n-1}(t) + U_n(x)\psi_n(t)$ med $U_n(x) = \sum_{j=0}^{M} U_{n,j}\phi_j(x)$ insatt i variationsformuleringen $\int_0^1 v'u' = \int_0^1 vf$ av problemet med testfunktionerna $v = \phi_i, i = 0, .., M$, resulterar i ekvationssystemet

$$(M + \frac{k}{2}S)U_n = (M - \frac{k}{2}S)U_{n-1} + kb_n,$$

där $k = t_n - t_{n-1}$ är tidssteget, U_n är nodvärdesvektorn med element $U_{n,j}$, M är massmatrisen med element $\int_0^1 \phi_i\phi_j$, S styvhetsmatrisen med element $\int_0^1 \phi_i'\phi_j'$, och b_n är lastvektorn med element $\frac{1}{k}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_0^1 \phi_i f$. Motsvarande för dG0 ($\approx$ implicit Euler) tidsstegning ger

$$(M + kS)U_n = MU_{n-1} + kb_n,$$

b)



2. a) Multiplikation av $-\Delta u = f$ med u, integration över Ω, och partiell integration med utnyttjande av randvillkoret $-\partial_n u = ku$, samt Cauchys olikhet och olikheten $ab \le \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ ger

$$||\nabla u||_\Omega^2 + k||u||_\Gamma^2 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u + \int_\Gamma u(\overbrace{-\partial_n u}^{=ku}) = \int_\Omega u(-\Delta u) = \int_\Omega uf$$
$$\le ||u||_\Omega\, ||f||_\Omega \le C_\Omega(||u||_\Gamma + ||\nabla u||_\Omega)\, ||f|| = ||u||_\Gamma C_\Omega ||f||_\Omega + ||u||_\Omega C_\Omega ||f||_\Omega$$
$$\le \frac{1}{2}||u||_\Gamma^2 + \frac{1}{2}||\nabla u||_\Omega^2 + C_\Omega^2||f||_\Omega^2$$

Efter subtraktion av $\frac{1}{2}||u||_\Gamma^2 + \frac{1}{2}||\nabla u||_\Omega^2$ från båda led följer att

$$(k - \frac{1}{2})||u||_\Gamma^2 \le \frac{1}{2}||\nabla u||_\Omega^2 + (k - \frac{1}{2})||u||_\Gamma^2 \le C_\Omega^2||f||_\Omega^2,$$

vilket ger att $||u||_\Gamma \to 0$ då $k \to \infty$, v.s.v.

b) Enligt tips fås med snäll funktion ϕ sådan att $\Delta\phi = 1$ att

$$||u||_\Omega^2 = \int_\Omega u^2\Delta\phi = \int_\Gamma u^2\partial_n\phi - \int_\Omega \overbrace{\nabla u^2}^{2u\nabla u} \cdot \nabla\phi$$

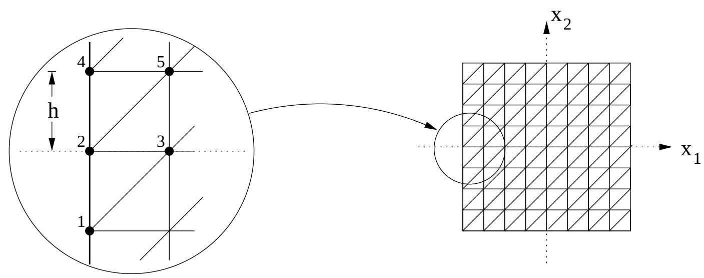
$$\leq C_1||u||_\Gamma^2 + C_2||u||\,||\nabla u|| \leq C_1||u||_\Gamma^2 + \frac{1}{2}||u||_\Omega^2 + \frac{1}{2}C_2^2||\nabla u||_\Omega^2,$$

dvs

$$||u||_\Omega^2 \leq 2C_1||u||_\Gamma^2 + C_2^2||\nabla u||_\Omega^2 \leq C^2(||u||_\Gamma + ||\nabla u||_\Omega)^2,$$

där $C^2 = \max(2C_1, C_2^2)$, $C_1 = \max_\Gamma |\partial_n \phi|$, $C_2 = \max_\Omega(2|\nabla\phi|)$, v.s.v.

3. a) Med U uttryckt i basfunktionerna ϕ_j, $j = 1, 2, 3, 4, 5, ..$ och med testfunktion $v = \phi_2$ i variationsformuleringen av problemet erhålls sambandet $-\frac{1}{2}U_1 + 2U_2 - U_3 - \frac{1}{2}U_4 = \frac{1}{2}h^2$



b) Med ekv ändrad till $-\Delta u + (1,0)\cdot\nabla u = 1$ blir sambandet

$$-\frac{1}{2}U_1 + 2U_2 - U_3 - \frac{1}{2}U_4 - \frac{h}{3}U_2 + \frac{h}{3}U_3 - \frac{h}{6}U_4 + \frac{h}{6}U_5 = \frac{1}{2}h^2,$$

och med ekv. ändrad till $-\nabla\cdot a\nabla u = f$ med $a = 1$ för $x_2 < 0$ och $a = 2$ för $x_2 > 0$ blir det $-\frac{1}{2}U_1 + 3U_2 - \frac{3}{2}U_3 - U_4 = \frac{1}{2}h^2$

4. a) $\frac{1}{4\pi|x|}$ lösning till $-\Delta u = \delta$ i R^3 med randvillkor $u \to 0$ då $r = |x| \to \infty$.

b) $\frac{1}{t^{3/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ lösning till $\dot{u} - \Delta u = 0$ i $x \in R^3$, $t > 0$ med begynnelsevillkor $u = \delta$ för $t = 0$ och randvillkor som i a).

c) $\int_{R^3} \frac{1}{t^{3/2}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}v(y)\,dy$ är lösning till samma problem som i b) men med begynnelsevärdet $u = v$ för $t = 0$.

d) Lösningen i a)

e) Lösningen i d) med $v = \frac{1}{4\pi|y|}$, dvs

$$\begin{aligned}\int_{R^3} \frac{1}{t^{3/2}}e^{-\frac{|0-y|^2}{4t}}\frac{1}{4\pi|y|}\,dy &= \frac{1}{t^{3/2}}4\pi\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4t}}\frac{1}{4\pi r}r^2\,dr\\ &= \{s = \tfrac{r^2}{4t}\} = \frac{2}{t^{1/2}}\int_0^\infty e^{-s}\,ds = 2\frac{1}{\sqrt{t}}.\end{aligned}$$

5. a) Tidsderivatan av $u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y,s)\,dy\,ds$ blir

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \tfrac{1}{2}\int_{x-t+t}^{x+t-t} f(y,t)\,dy + \tfrac{1}{2}\int_0^t f(x+t-s,s) - f(x-t+s,s)(-1)\\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^t f(x+t-s) + f(x-t+s),\end{aligned}$$

dvs för $t = 0$ fås $\dot{u}(x, 0) = 0$.
b) Ytterligare en tidsderivering ger

$$\ddot{u} = f(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^t f'(x + t - s, s) - f'(x - t + s, s).$$

Derivering m.a.p. x ger $u'(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t f(x + t - s, s) - f(x - t + s, s)$ och

$$u''(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t f'(x + t - s, s) - f'(x - t + s, s),$$

dvs $\ddot{u} - u'' = f$, vilket skulle visas.
c)