Lektion 7

Linjär algebra

Har redan (i matlab bl.a.) stött på *tal-listor* eller *vektorer* av typen

$$(1.2,\ -4.5,\ 3.2), \quad (6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2), \quad [1.2, -3.4], \quad \begin{bmatrix} 2.1 \\ 5.0 \\ 1.7 \end{bmatrix}, \text{etc}$$

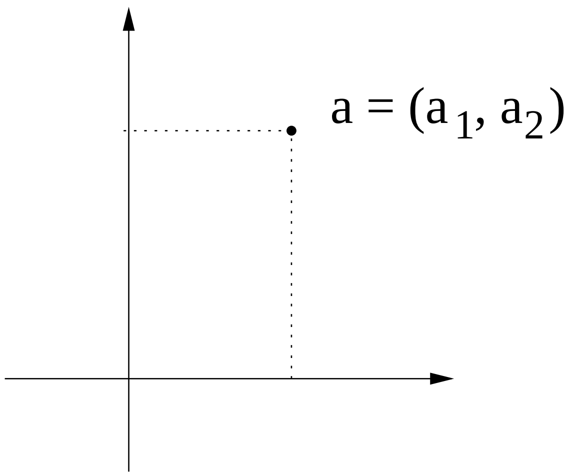
- Vad kan sådana tänkas representera/modellera?
- Hur kan man *räkna* med sådana?

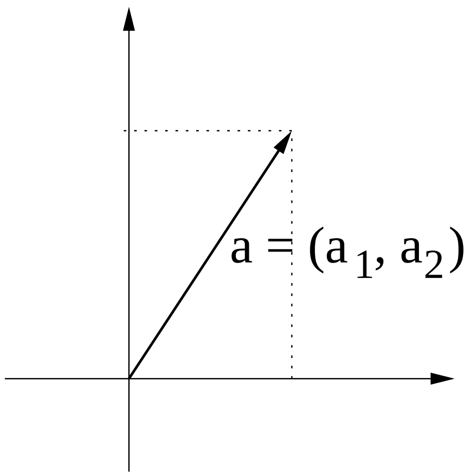
Skall närmast fokusera på *ordnade talpar* av typen $a = (a_1,\ a_2)$ resp *triplar* av typen $a = (a_1,\ a_2,\ a_3)$ av reella tal a_i.

Linjär algebra

Punkt-vektor dualismen

Ett ordnat talpar av typen $a = (a_1, a_2)$ kan t.ex. representera en punkts *position* i ett plan, där a_1 och a_2 är punktens *koordinater* i ett givet *koordinat-system* bestående av två (oberoende) koordinatriktningar, som t.ex. vänster-höger och ner-upp på ett papper, oftast representerade av två koordinataxlar motsvarande den reella tallinjen med ett gemensamt origo, se figur.





Linjär algebra

Ett sådant talpar kan också tänkas representera samma punkts “läge relativt origo”, och beskrivs då med fördel av en *pil* utgående från origo med horisontell utsträckning a_1 och vertikal utsträckning a_2. Vi noterar att en sådan *pil* eller *vektor* har sin spets i *punkten* $a = (a_1\, a_2)$.

I tillämpningar representerar punkter *position* och vektorer *förskjutningar (relativlägen), hastigheter, accelerationer och krafter*,

Linjär algebra

Skalning och addition av vektorer:

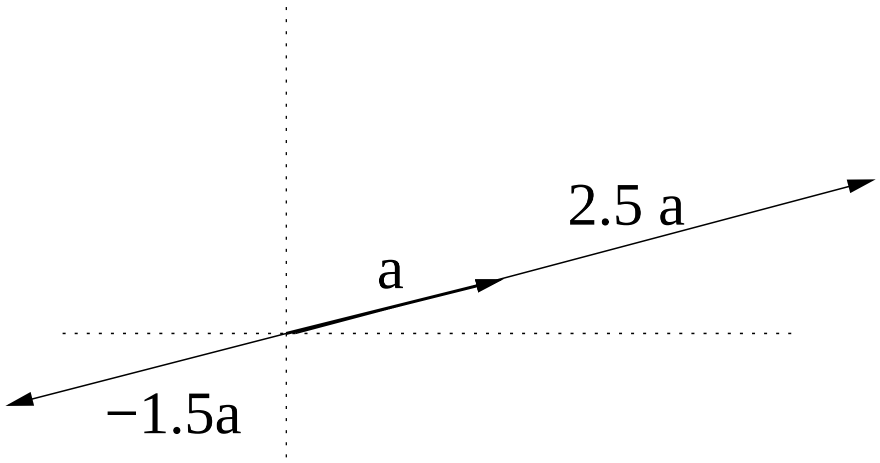
Vektorer/pilar kan (till skillnad från punkter) på ett naturligt sätt *“skalas”*, dvs *multipliceras med skalärer*, dvs *tal*:

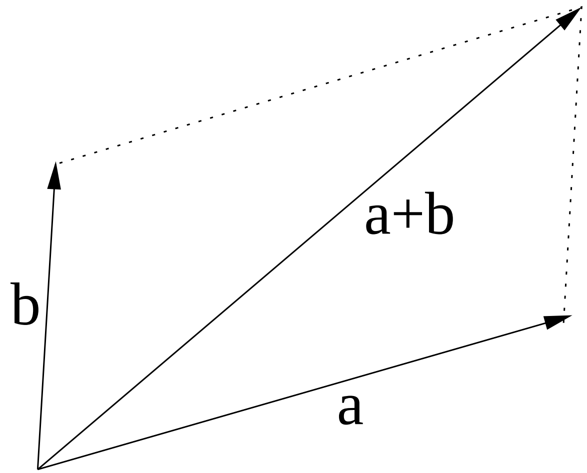
$$\lambda\, a = \lambda\,(a_1,\, a_2) = (\lambda\, a_1,\, \lambda\, a_2),$$

och *adderas*:

$$a + b = (a_1,\, a_2) + (b_1,\, b_2) = (a_1 + b_1,\, a_2 + b_2).$$

Linjär algebra





Som vanligt skriver vi $(-1)\,b$ som $-b$ och $a + (-1)b$ som $a - b$.

Vektorn $0 = (0,\,0)$ kallas *nollvektorn*. Notera de två olika "typerna" av nollor här!

Linjär algebra

Följande räknelagar kan nu verifieras:

- $a + b = b + a$ dvs additionen *kommutativ*
- $(a + b) + c = a + (b + c)$ och *associativ*
- $(s + t)\, a = s\, a + t\, a$ och $s\,(a + b) = s\, a + s\, b$ *distributiva lagarna*
- $(s\, t)\, a = s\,(t\, a)$, $1\, a = a$, $0\, a = \mathbf{0}$

Linjär algebra

En vektors norm, dvs Euclidiska längd

Längden av en vektor $a = (a_1, a_2)$ ges enligt Pythagoras av

$$|a| = (a_1^2 + a_2^2)^{1/2}.$$

Notera att i Matlab ger length(a) *antalet* komponenter i $a = (a_1, a_2)$, dvs 2 i detta fall, medan norm(a) ger (den Euclidiska/geometriska) längden $|a|$.

Klart att $|a| \geq 0$ för alla a, med likhet endast för nollvektorn.

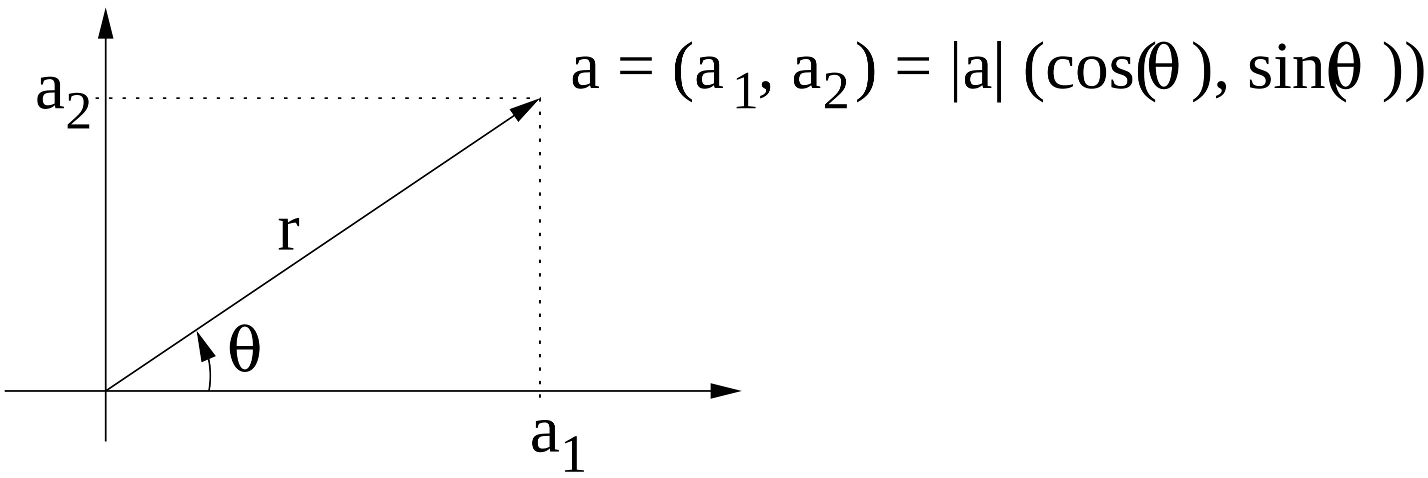
Linjär algebra

Polär framställning av vektorer:

Vektorer kan förstås även beskrivas med hjälp av de *polära* koordinaterna r och θ (se figur) som

$$a = r\,(\cos(\theta), \sin(\theta)),$$

där alltså $r = |a|$.



Linjär algebra

Vi noterar speciellt att $\frac{1}{|a|}\,a\ (= \frac{a}{|a|})$ ger en vektor med samma riktning som a, dvs parallell med a, men *normaliserad*, dvs med längd $= 1$.

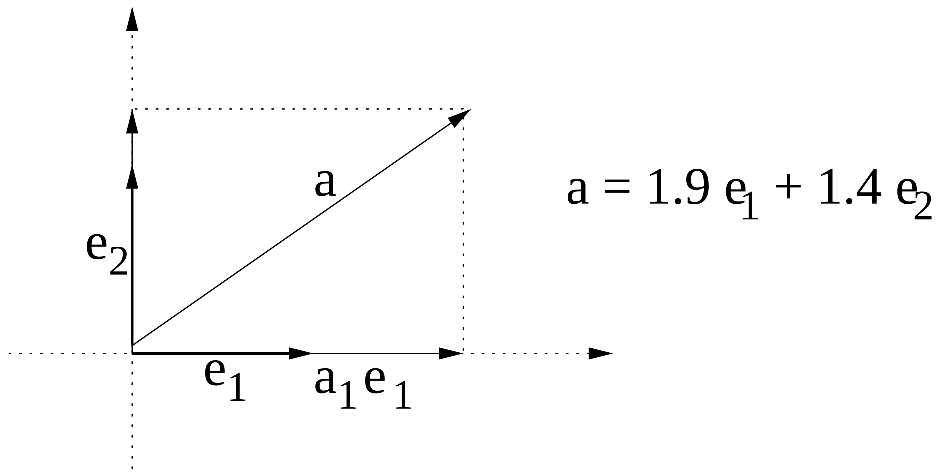
Linjär algebra

Bas

Vektorerna $e_1 = (1, 0)$ och $e_2 = (0, 1)$ utgör (tills.) en *bas* för vektorerna i planet, dvs varje vektor $a = (a_1,\, a_2)$ kan skrivas som en *linjärkombination* av e_1 och e_2 som

$$a_1\, e_1 + a_2\, e_2,$$

ty $\quad (a_1,\, a_2) = a_1\,(1, 0) + a_2\,(0,\, 1) = a_1\, e_1 + a_2\, e_2.$



Linjär algebra

Skalär produkt:

Har tidigare definierat “skalning” av en vektor genom multiplikation med ett (reellt) tal λ, och (i Matlab) har vi stött på komponentvis multiplikation av vektorer betecknad $a. * b = (a_1\, b_1,\, a_2\, b_2)$. Vi skall nu definiera en ny typ av produkt av två vektorer där resultatet är skalär, dvs ett *tal*, kallad *skalära produkten* av a och b, och definerad som

$$a \cdot b = (a_1,\, a_2) \cdot (b_1,\, b_2) = a_1\, b_1 + a_2\, b_2.$$

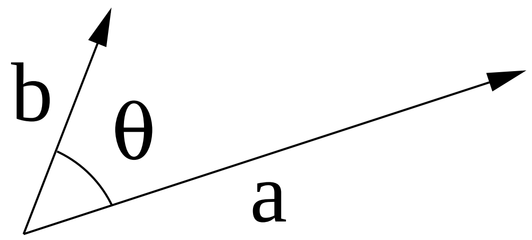
Linjär algebra

Har tidigare sett att signifikativt för denna produkt är att vektorerna a och b är *ortogonala*, dvs vinkelräta mot varandra, om och endast om $a \cdot b = 0$.

Mera allmänt gäller:

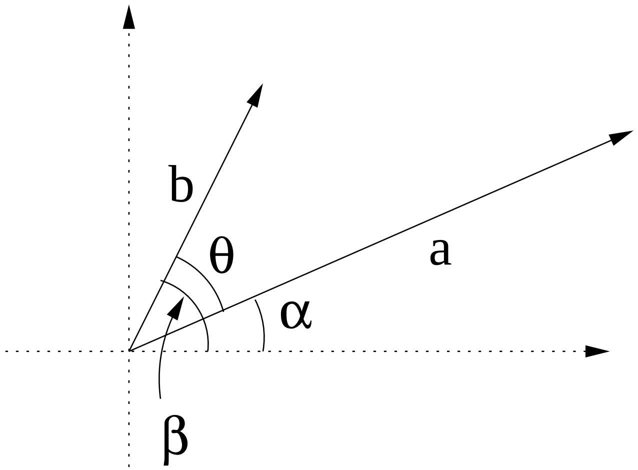
$$a \cdot b = |a|\,|b|\,\text{cos}(\theta),$$

där θ är vinkeln mellan a och b.



Linjär algebra

Sambandet $a \cdot b = |a|\,|b| \cos(\theta)$ följer direkt av att



$$
\begin{aligned}
a \cdot b &= (|a| \cos(\alpha),\ |a| \sin(\alpha)) \cdot (|b| \cos(\beta),\ |b| \sin(\beta)) \\
&= |a|\,|b|\,(\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)) \\
&= |a|\,|b| \cos(\underbrace{\beta - \alpha}_{=:\,\theta})
\end{aligned}
$$

Linjär algebra

Skalärprodukt och längd:

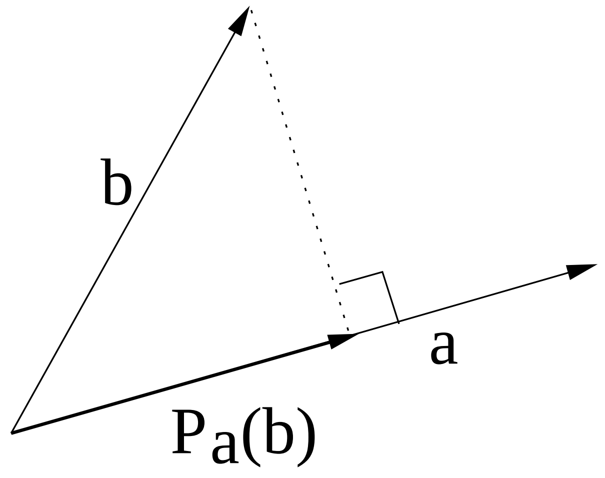
Noterar speciellt att $a \cdot a = |a|\,|a| = |a|^2$, dvs $|a| = (a \cdot a)^{1/2}$, dvs det finns en naturlig koppling mellan skalärprodukt och längd.

Linjär algebra

Projektion av en vektor b på en vektor a:

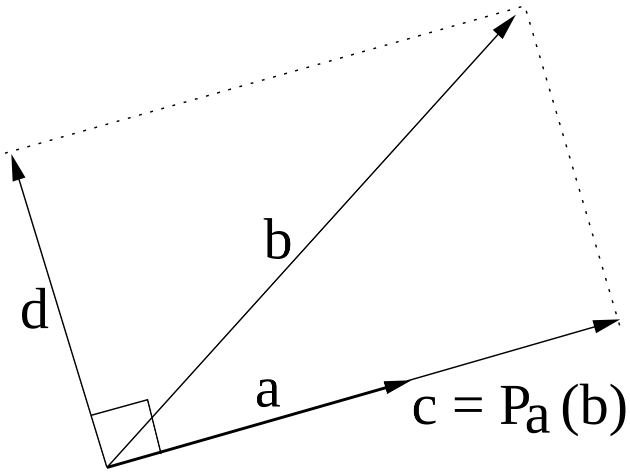
En vektor b's komponent i riktning a kallas *projektionen av b på a*, betecknas $P_a(b)$, och definieras

$$P_a(b) = \frac{a \cdot b}{a \cdot a}\, a = \frac{b \cdot a}{|a|^2}\, a.$$



Linjär algebra

Motivet för denna konstruktion är bl.a. att man vill kunna dela upp en vektor b i en komponent c *parallell* med a och en komponent d *ortogonal* mot a, så att $b = c + d$. Klart att det här räcker att bestämma c eftersom d sedan bestäms av $d = b - c$. Komponenten c parallell med a ges av projektionen $P_a(b)$.



Linjär algebra

Formeln för $c = P_a(b)$ motiveras av att $P_a(b)$ skall vara parallel med a, dvs

$$P_a(b) = \lambda\, a$$

för något tal λ, och att $d = b - P_a(b)$ skall vara ortogonal mot a, dvs $(b - \lambda\, a) \cdot a = 0$ som ju ger

$$\lambda = \frac{b \cdot a}{a \cdot a},$$

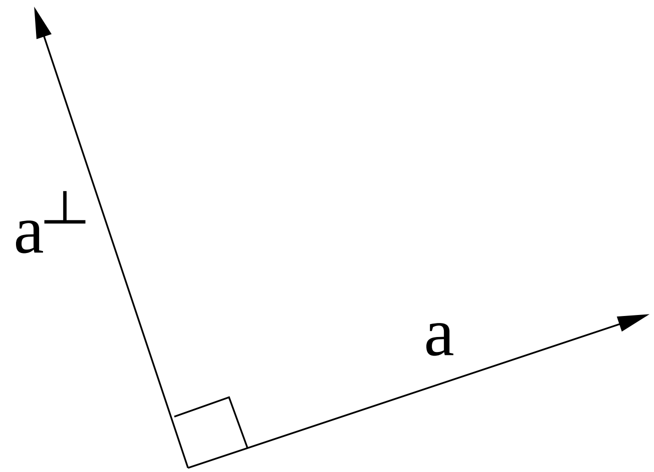
dvs

$$P_a(b) = \frac{b \cdot a}{a \cdot a}\, a.$$

Linjär algebra

Rotation 90° moturs:

Givet vektorn $a = (a_1, a_2)$ kan vi bilda vektorn $a^\perp = (-a_2, a_1)$ med egenskapen att $a^\perp \cdot a = -a_2\, a_1 + a_1\, a_2 = 0$, dvs $a^\perp$ är *ortogonal* mot a. Klart också att $|a^\perp| = |a|$, dvs att $a^\perp$ har samma längd som a. Inspektion visar att $a^\perp$ motsvarar vektorn a roterad 90° moturs.



Linjär algebra

Mera allmänt kan vi definierar rotation av a vinkeln θ genom

$$R_\theta(a) = |a|\,(\text{cos}(\alpha+\theta), \, \text{sin}(\alpha+\theta)).$$

Vi vill nu uttrycka $R_\theta(a)$ i a_1 och a_2 (och cos(θ) och sin(θ)) och utnyttjar att

$$\text{cos}(\alpha+\theta) = \text{cos}(\alpha)\,\text{cos}(\theta) - \text{sin}(\alpha)\,\text{sin}(\theta),$$

och motsvarande formel för sin$(\alpha+\theta)$. Detta ger

$$R_\theta(a) = (a_1\,\text{cos}(\theta) - a_2\,\text{sin}(\theta), \, a_1\,\text{sin}(\theta) + a_2\,\text{cos}(\theta)).$$

Linjär algebra

Speciellt har vi

$$R_\theta(e_1) = (\cos(\theta), \sin(\theta)),$$

och

$$R_\theta(e_2) = (-\sin(\theta), \cos(\theta)).$$

Man kan också se att

$$R_\theta(a) = \cos(\theta)\, a + \sin(\theta)\, a^\perp,$$

som ger samma formel som ovan!

Linjär algebra

Byte av koordinatsystem:

Låt $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ var basvektorerna e_1, e_2 roterade vinkeln θ moturs. En given vektor a kan då skrivas som $a_1\, e_1 + a_2\, e_2$ eller alternativt som $\hat{a}_1\, \hat{e}_1 + \hat{a}_2\, \hat{e}_2$, dvs som $a = (a_1,\, a_2)$ eller $\hat{a} = (\hat{a}_1,\, \hat{a}_2)$. Vilket är sambandet mellan $\hat{a}_i$ koordinaterna och a_i koordinaterna?

Vi har att

$$
\begin{aligned}
a_1\, e_1 &+ a_2\, e_2 = \hat{a}_1\, \hat{e}_1 + \hat{a}_2\, \hat{e}_2 \\
&= \hat{a}_1\, (\cos(\theta)\, e_1 + \sin(\theta)\, e_2) + \hat{a}_2\, (-\sin(\theta)\, e_1 + \cos(\theta)\, e_2) \\
&= (\hat{a}_1 \cos(\theta) - \hat{a}_2 \sin(\theta))\, e_1 + (\hat{a}_1 \sin(\theta) + \hat{a}_2 \cos(\theta))\, e_2
\end{aligned}
$$

Linjär algebra

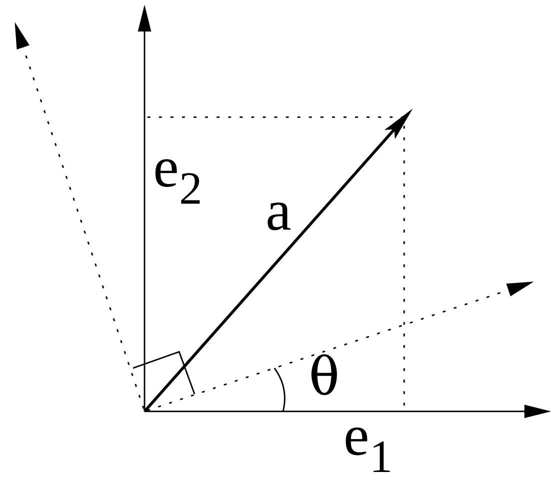
Dvs

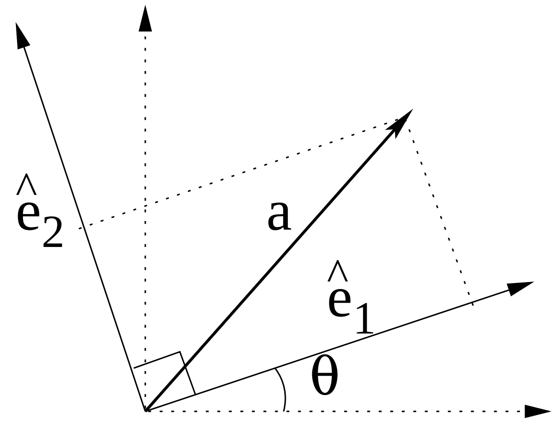
$$a_1 = \hat{a}_1 \cos(\theta) - \hat{a}_2 \sin(\theta)$$

och

$$a_2 = \hat{a}_1 \sin(\theta) + \hat{a}_2 \cos(\theta).$$

Analogt kan $\hat{a}_i$ koordinaterna uttryckas i a_i koordinaterna.





Linjär algebra

Vektorprodukt av vektorer:

Denna produkt avser egentligen 3d vektorer $a = (a_1,\, a_2,\, a_3)$ och $b = (b_1,\, b_2,\, b_3)$ och defineras då

$$
\begin{aligned}
a \times b &= (a_1,\, a_2,\, a_3) \times (b_1,\, b_2,\, b_3) \\
&= (a_2\, b_3 - a_3\, b_2,\, a_3\, b_1 - a_1\, b_3,\, a_1\, b_2 - a_2\, b_1).
\end{aligned}
$$

Vi noterar att i specialfallet med vektorer “i planet”, dvs med $a_3 = b_3 = 0$ reduceras denna produkt till

$$
a \times b = (0,\, 0,\, a_1\, b_2 - a_2\, b_1),
$$

vilket vi tillåter oss att “förkorta” till

$$
a \times b = a_1\, b_2 - a_2\, b_1.
$$

Linjär algebra

Vilka egenskaper har då denna nya produkt?

Vi noterar först att

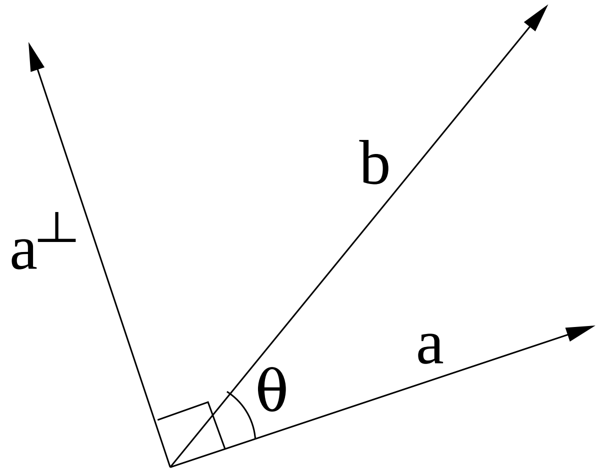
$$a \times b = a_1\, b_2 - a_2\, b_1 = (-a_2,\, a_1) \cdot (b_1,\, b_2) = a^{\perp} \cdot b.$$

Speciellt ger detta att $a \times b = 0$ om och endast om a och b är parallella!

Linjär algebra

Vidare följer (se figur) att

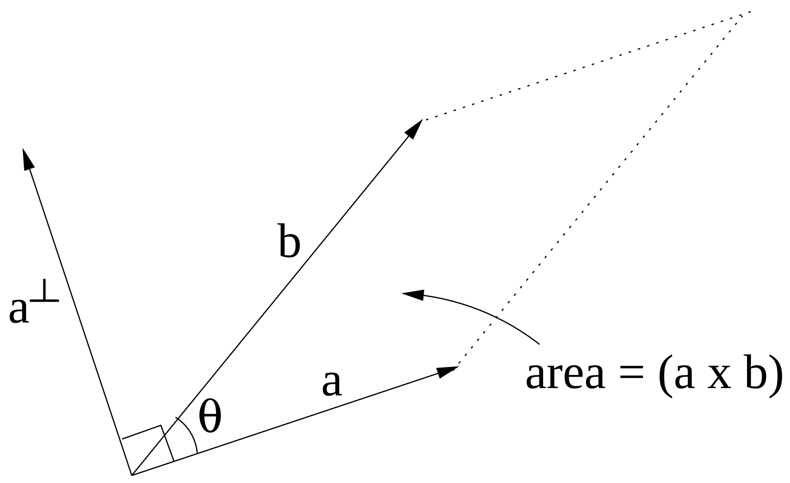
$$a \times b = a^{\perp} \cdot b = |a^{\perp}|\,|b|\cos(90-\theta) = |a|\,|b|\sin(\theta).$$



Linjär algebra

Areaberäkningar m.h.a. vektorprodukt:

Vidare visar sambandet $a \times b = a^{\perp} \cdot b = |a^{\perp}|\,|b| \sin(\theta)$ att $a \times b$ ger *arean av den parallellogram som "spänns upp" av vektorerna a och b*.



Linjär algebra

Mera precist gäller detta om a och b är inbördes orienterade som i figuren, annars gäller att arean ges av $b \times a$.

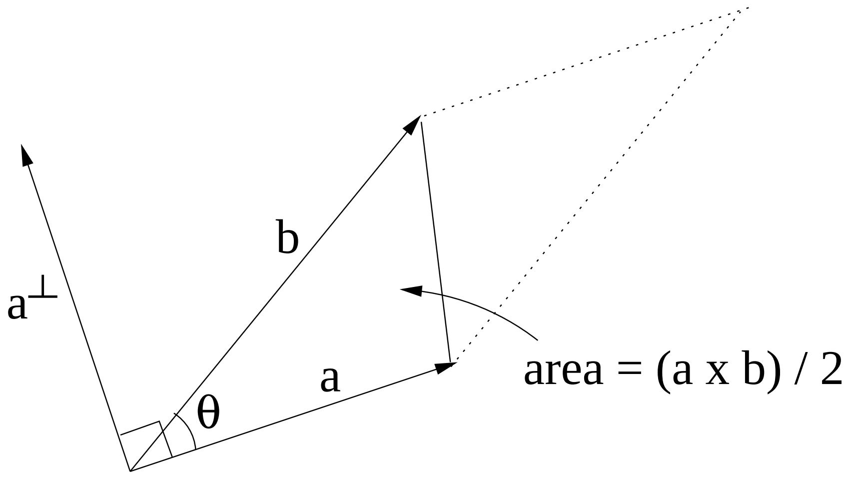
Allmänt gäller alltså $|a \times b| = \text{Area}(a, b)$.

Vi noterar att $a \times b = -b \times a$, dvs vektorprodukten är *anti-kommutativ*! Originellt!

Linjär algebra

För motsvarande triangelarea (se figur) gäller förstås

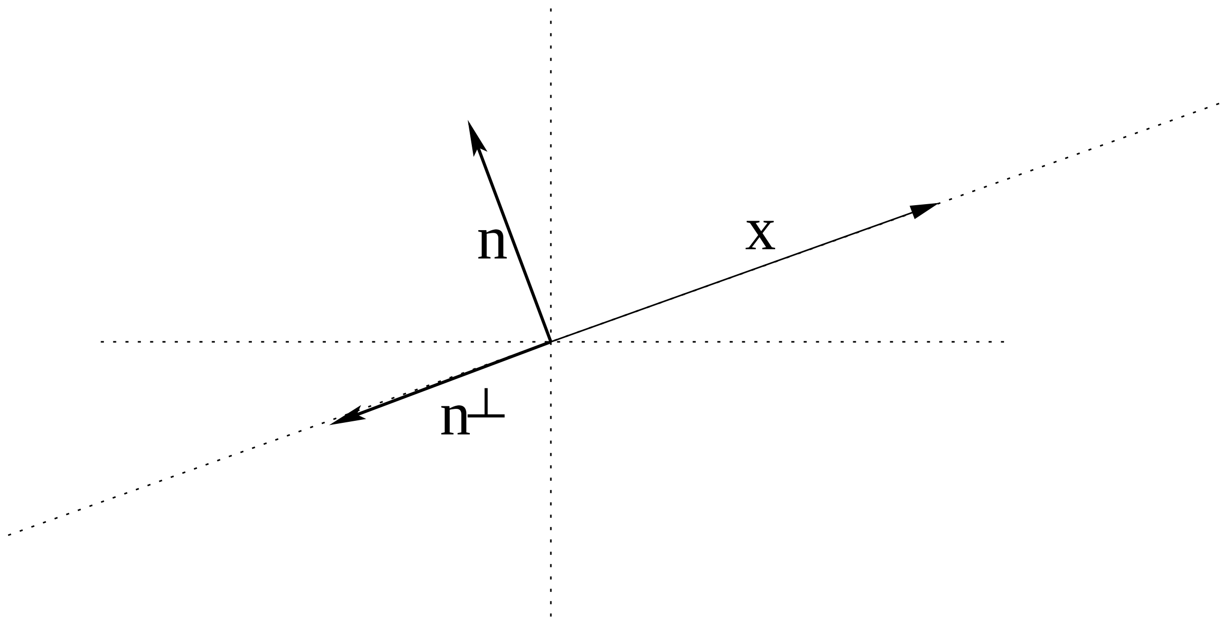
$$\text{Area}(a, b) = |a \times b| \,/\, 2$$



Linjär algebra

Räta linjens ekvation:

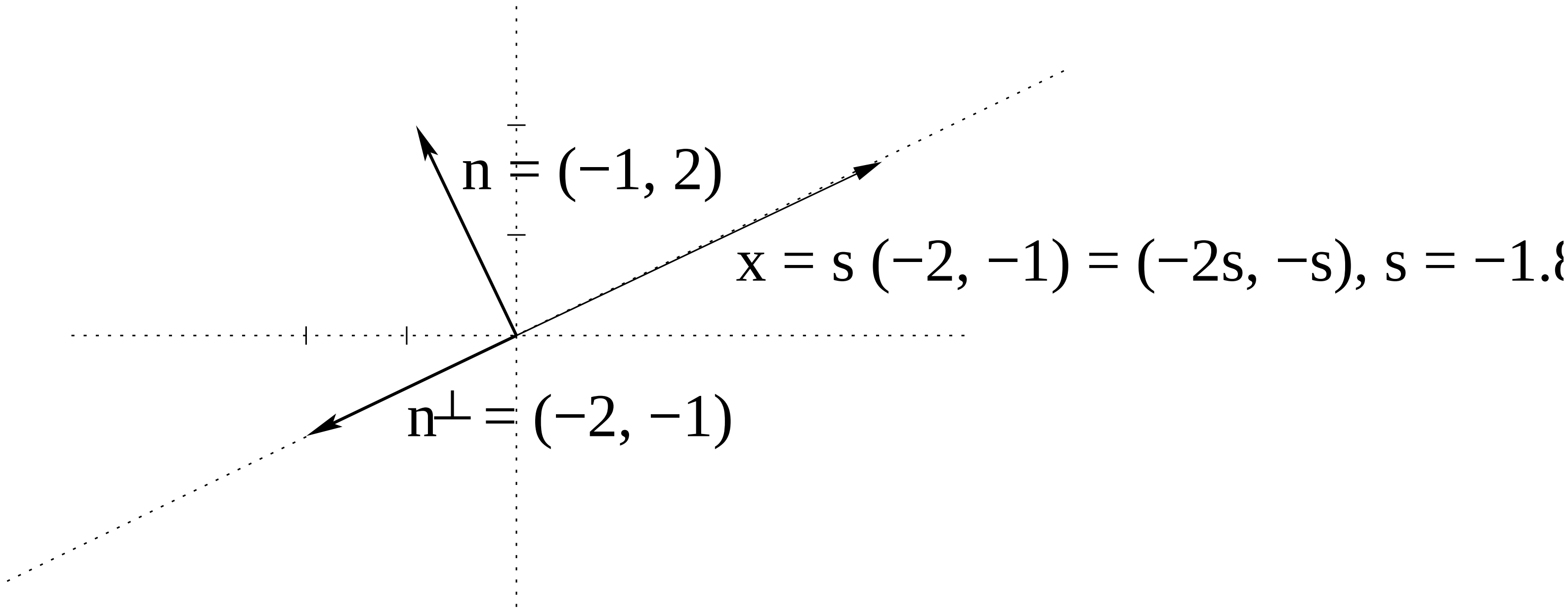
Ekvationen $n \cdot x = 0$ beskriver en *rät linje* genom origo, ortogonal mot n.



Linjär algebra

Eftersom lösningarna $x = (x_1, x_2)$ till ekvationen $n \cdot x = 0$ ges av $x = s\, n^\perp$, $s \in R$, har vi nu två ekvivalenta sätt att beskriva linjen:

$$n \cdot x = 0 \quad \text{respektive} \quad x = s\, n^\perp,\ s \in R.$$



Linjär algebra

Exempel:

$$\underbrace{(1,\,2)}_{n}\cdot\underbrace{(x_1,\,x_2)}_{x}=x_1+2\,x_2=0,$$

och

$$(x_1,\,x_2)=s\,\underbrace{(-2,\,1)}_{n^\perp}=(-2\,s,\,s),\ s\in R,$$

dvs

$$x_1=-2\,s\ \text{ och }\ x_2=s,\ \ s\in R,$$

beskriver samma räta linje genom origo.

Notera att *riktningsvektorn* $n^\perp$ i $x=s\,n^\perp$ kan bytas ut mot godtycklig vektor $a\neq 0$ som är ortogonal mot n, dvs parallell med $n^\perp$, eftersom *parametern* s antar alla reella värden.

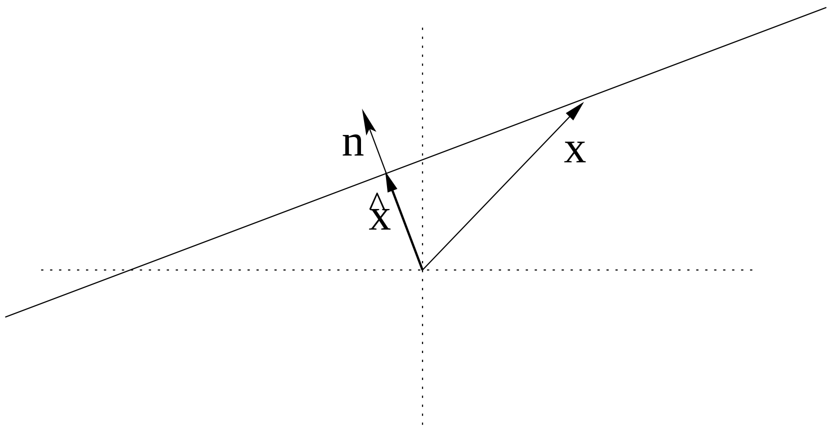
Linjär algebra

På samma sätt definierar $n \cdot x = d$ en rät linje genom punkten $\hat{x} = \frac{d}{|n|^2} n$, ortogonal mot n, ty $\hat{x}$ löser den givna ekvationen:

$$n \cdot \frac{d}{|n|^2} n = d,$$

liksom varje x sådant att $x - \hat{x}$ är ortogonalt mot n, ty $n \cdot (x - \hat{x}) = 0$ ger att

$$n \cdot x = n \cdot \hat{x} = d = 0.$$



Linjär algebra

Notera att linjen alltså består av de x för vilka $\hat{x} = P_n(x)$, och att linjen även kan skrivas på *parameterform* som

$$x = \hat{x} + s\,a,$$

där $\hat{x}$ är en *godtycklig* punkt på linjen (dvs uppfyller $n \cdot \hat{x} = d$), och a är en godtycklig vektor parallel med $n^{\perp}$. För sådana x fås nämligen

$$n \cdot \underbrace{(\hat{x} + s\,a)}_{x} = n \cdot \hat{x} + s\,n \cdot a = d.$$

Exempel: $x = (1,\,0) + s\,(1,\,2), s \in R$ är linjen genom punkten $(1,\,0)$ ortogonal mot $n = (-2,\,1)$.

Linjär algebra

Projektion av en punkt b på linjen $n \cdot x = d$:

Söker Pb på linjen, dvs med $n \cdot Pb = d$, sådan att $b - Pb$ är parallel med n, dvs $b - Pb = \lambda\, n$, dvs $Pb = b - \lambda\, n$ vilket insatt i $n \cdot Pb = d$ ger

$$n \cdot (b - \lambda\, n) = d,$$

dvs

$$n \cdot b - d = \lambda n \cdot n, \quad \text{dvs} \quad Pb = b - \frac{n \cdot b - d}{n \cdot n}\, n.$$

Linjär algebra

När är två linjer parallela?

Betrakta linjerna

$$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 = b_1,$$
$$a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 = b_2,$$

med normaler $(a_{11},\, a_{12})$ och $(a_{21},\, a_{22})$. Klart att dessa parallella precis då normalerna är parallella, dvs då $(a_{11},\, a_{12}) \times (a_{21},\, a_{22}) = 0$, och *icke-parallella* då $(a_{11},\, a_{12}) \times (a_{21},\, a_{22}) \neq 0$.

Speciellt har de två linjerna en entydigt bestämd skärningspunkt precis då $(a_{11},\, a_{12}) \times (a_{21},\, a_{22}) \neq 0$.

Linjär algebra

Exempel: Linjerna $x_1 + 2\,x_2 = 3$ och $4\,x_1 + 5\,x_2 = 6$ är icke-parallellella ty $(1,\,2) \times (4,\,5) = 5 - 8 = -3 \neq 0$

Ekvationssystemet ovan med två ekvationer kan även skrivas på *vektorform* som

$$x_1\,a_1 + x_2\,a_2 = b,$$

där $a_1 = (a_{11},\,a_{21})$, $a_2 = (a_{12},\,a_{22})$ och $b = (b_1,\,b_2)$. Vektormultiplikation med a_2 (från höger) ger

$$x_1\,a_1 \times a_2 + x_2\,\underbrace{a_2 \times a_2}_{=0} = b \times a_2,$$

dvs om $a_1 \times a_2 \neq 0$ erhålls

Linjär algebra

$$x_1 = \frac{b \times a_2}{a_1 \times a_2}.$$

Analogt fås x_2 genom multiplikation med a_1:

$$x_1 \underbrace{a_1 \times a_1}_{=0} + x_2 \, a_2 \times a_1 = b \times a_1,$$

vilket ger

$$x_2 = \frac{b \times a_1}{a_2 \times a_1}.$$

Linjär algebra

Sats: Om $x_1\, a_1 + x_2\, a_2 = b$ och $a_1 \times a_2 \neq 0$ så gäller $x_1 = \frac{b \times a_2}{a_1 \times a_2}$, $x_2 = \frac{b \times a_1}{a_2 \times a_1}$. Omvänt ger dessa formler en lösning, som därmed är entydigt bestämd. Om å andra sidan $a_1 \times a_2 = 0$ så finns i allmänhet *ingen lösning*, eller (eventuellt) *oändligt många lösningar* om de båda ekvationerna är ekvivalenta, dvs multipler av varandra.

Notera att $a_1 \times a_2 = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12} = r_1 \times r_2 = 0$ innebär att såväl kolonnerna a_1, a_2 som raderna r_1, r_2 (och därmed linjerna $a_{11}\, x_1 + a_{21}\, x_2 = b_1$ och $a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 = b_2$ är (parvis) parallella.

Exempel: Ekvationerna $2\, x_1 - 3\, x_2 = 4$ och $-4\, x_1 + 6\, x_2 = a$ saknar lösning för alla a utom för $a = -8$, för vilket alla $(x_1,\, x_2)$ med $2\, x_1 = 3\, x_2 + 4$ är lösningar.

Matris-vektor multiplikation

Matrisformalism: Vi skriver nu ekvationssystemet

$$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 = b_1$$
$$a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 = b_2$$

symboliskt som

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{b}.$$

där A är en s.k. 2×2-*matris*, och x och b s.k. 2×1-matriser, eller 2-kolonn-vektorer, dvs 2-långa kolonnvektorer.

Matris-vektor multiplikation

Notera att matrisen A i sin tur kan tänkas bestå av 2 stycken 2-kolonn-vektorer, eller, alternativt, 2 stycken 2-rad-vektorer, samt att *produkten* $A\,x$, dvs 2-kolonn-vektorn

$$\begin{matrix} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 \end{matrix}$$

kan ses som *skalärprodukterna genererade av A's rader med x*.

Matris-vektor multiplikation

Notera att likhet mellan två vektorer $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ och $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, dvs

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = b$$

gäller om och endast om

$$\begin{cases} c_1 = b_1 \\ c_2 = b_2, \end{cases}$$

dvs *likhet i båda komponenterna*.

Matris-vektor multiplikation

Speciellt gäller alltså att

$$A\,x = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [a_1 \;\; a_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = a_1\,x_1 + a_2\,x_2$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}\,x_1 \\ a_{21}\,x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12}\,x_2 \\ a_{22}\,x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

dvs $A\,x = b$, om och endast om

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 = b_2. \end{cases}$$

Matris-vektor multiplikation

Exempel:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix},$$

betyder

$$\begin{bmatrix} 2\,x_1 - 3\,x_2 \\ 4\,x_1 + 5\,x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix},$$

med lösning $x_1 = \frac{(6,7)\times(2,4)}{(-3,5)\times(2,4)} = \frac{10}{-22} = -\frac{5}{11}$ och $x_2 = ...$

Komplexa tal

Komplexa tal

Komplexa tal

Ett komplext tal är ett *ordnat par* $z = (a, b)$ av reella tal a och b, där $a = \text{Re}\, z$ kallas *realdelen* och $b = \text{Im}\, z$ kallas *imaginärdelen* av z. Om vi *identifierar* de komplexa tal som har $\text{Im}\, z = b = 0$ med motsvarande realla tal a, dvs

$$(a, 0) \quad \text{med} \quad a: \qquad (a, 0) = a,$$

kan de reella talen ses som en *delmängd* av de komplexa, dvs

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C \qquad (= \text{mängden av komplexa tal}).$$

Komplexa tal

Addition

av två komplexa tal $z = (a, b)$ och $w = (c, d)$ definieras

$$z + w = (a + c, b + d),$$

dvs realdelarna adderas för sig och imaginärdelarna för sig, som vid vektoraddition.

Notera: Om z och w reella, dvs $b = 0$ och $d = 0$, fås $z + w = (a + c, 0 + 0) = (a + c, 0)$, dvs samma summa som om $z = (a, 0)$ och $w = (c, 0)$ skulle betraktas som reella tal!

Komplexa tal

Multiplikation

av $z = (a,\, b)$ och $w = (c,\, d)$ defineras

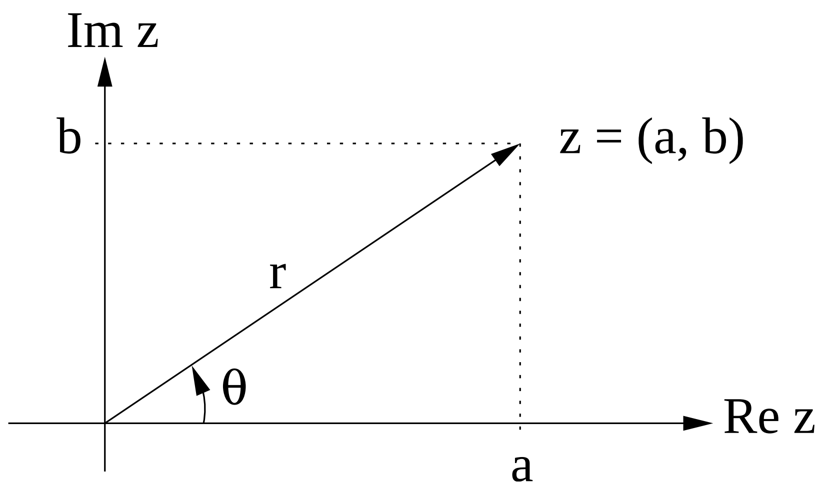
$$z\,w = (a\,c - b\,d,\; a\,d + b\,c).$$

Notera: Om z och w reella (har imaginärdel $= 0$) så fås samma summa/produkt som för reella tal.

Notera: $\underbrace{(0,\, 1)}_{=:i}(0,\, 1) = (-1,\, 0) = -1$, dvs vi har konstruerat ett tal $i = (0, 1)$ vars kvadrat (produkt med sig själv) är negativ!: $i^2 = -1$. Kan därmed lösa t.ex. ekvationen $z^2 = -1$ vilket tidigare inte var möjligt!

Komplexa tal

Polär representation



Användbar i samband med multiplikation:

$$z = r\,(\cos\theta, \sin\theta), \quad w = \rho\,(\cos\varphi, \sin\varphi), \quad \Rightarrow$$

$$z\,w = r\,\rho\,(\underbrace{\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi}_{\cos(\theta+\varphi)}, \underbrace{\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi}_{\sin(\theta+\varphi)}).$$

Komplexa tal

Dvs

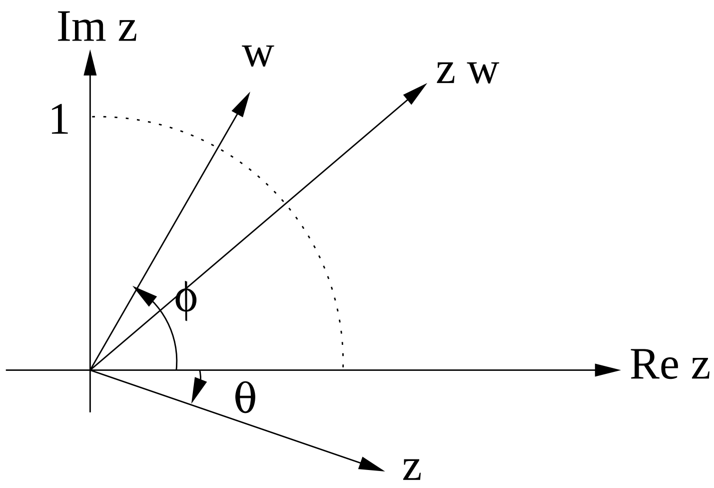
$$z\,w = r\,\rho\,(\mathsf{cos}(\theta+\varphi),\ \mathsf{sin}(\theta+\varphi)),$$

dvs

$$|z\,w| = r\,\rho = |z|\,|w|,$$

och

$$\mathsf{Arg}(z\,w) = \theta+\varphi = \mathsf{Arg}z + \mathsf{Arg}w.$$



Komplexa tal

Framställningen $z = a + b\,i$

Har redan infört "förkortningen" i för det komplexa talet $(0, 1)$, med den speciella egenskapen $i^2 = -1$. Det följer nu från regeln för multiplikation att

$$(0, b) = \underbrace{(b,\, 0)}_{=b}\,\underbrace{(0,\, 1)}_{=i} = b\,i,$$

dvs vi kan skriva

$$z = (a,\, b) = (a,\, 0) + (0,\, b) = a + b\,i.$$

Analogt gäller $(0,\, b) = (0,\, 1)\,(b, 0) = i\,b$, dvs vi kan lika gärna skriva

$$z = a + i\,b.$$

Komplexa tal

Exempel: Vi beräknar

$$(2+3\,i)\,(4-3\,i) = (2,3)\,(4,\,-3) = (8-(-9),\,-6+12) = (17,\,6).$$

Kan också erhållas

$$(2+3\,i)\,(4-3\,i) = 8-9\,\underbrace{i^2}_{-1}-6\,i+12\,i = 17+6\,i.$$

Exempel:

$$2\,(a,\,b) = (2,\,0)\,(a,\,b) = (2\,a-0\,b,\,2\,b+0\,a) = (2\,a,\,2\,b),$$

dvs som för “skalning av vektorer” om en faktor är reell.

Komplexa tal

Absolutbeloppet

av ett komplext tal $z = (a,\, b)$ betecknas $|z|$ och definieras $|z| = (a^2 + b^2)^{1/2}$, dvs som normen, eller längden, för vektorer.

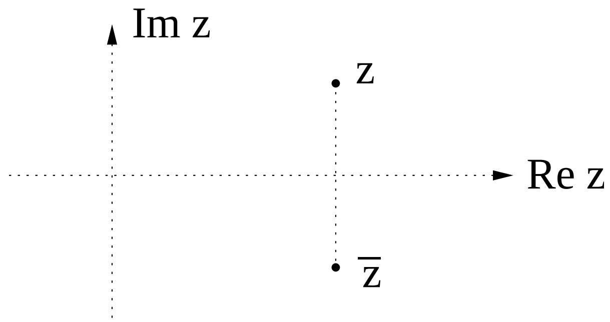
Exempel: $|(2,\, -3)| = \sqrt{13}$

Konjugatet **av ett komplext tal** $z = (a,\, b)$

betecknas $\bar{z}$ och definieras $\bar{z} = (a,\, -b)$, dvs genom teckenbyte på imaginärdelen.

Komplexa tal

Vi noterar att *konjugering* innebär “spegling i real axeln”:



Vidare att

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \text{och} \quad \overline{z\,w} = \bar{z}\,\bar{w},$$

samt att

$$z\,\bar{z} = (a,\, b)\,(a,\, -b) = (a^2 - b\,(-b),\, a\,(-b) + b\,a) = (a^2 + b^2, 0) = |z|^2,$$

dvs $z\,\bar{z} = |z|^2$.

Komplexa tal

Kvoten $z/w = \frac{z}{w}$ mellan två komplexa tal $z = (a,\, b)$ och $w = (c,\, d)$, beräknas som

$$z/w = \frac{z}{w} = \frac{(a,b)}{(c,d)} = \frac{(a,b)\,(c,-d)}{(c,d)\,(c,-d)} = \frac{(a\,c{+}b\,d, b\,c{-}a\,d)}{c^2{+}d^2}$$
$$= \frac{1}{c^2{+}d^2}\,(a\,c + b\,d,\; b\,c - a\,d),$$

dvs

$$\frac{z}{w} = \frac{z\,\bar{w}}{|w|^2} = \frac{1}{|w|^2}\,z\,\bar{w},$$

dvs genom att “förlänga med nämnarens konjugat”.

Exampel: $\frac{(1,2)}{(3,4)} = \frac{(1,2)\,(3,-4)}{3^2{+}4^2} = \frac{1}{25}\,(11,\, 2).$

Komplexa tal

Motivet till definitionen är förstås att $\frac{z}{w}$ skall uppfylla

$$w\,\frac{z}{w} = z.$$

Direkt kontroll visar att detta är fallet:

$$w\,\frac{1}{|w|^2}\,z\,\bar{w} = \frac{1}{|w|^2}\,\underbrace{w\,\bar{w}}_{=|w|^2}\,z = z,$$

vilket skulle visas!

Notera att vi här använt att multiplikation av komplexa tal är *kommutativ* och *associativ*, dvs att $z\,w = w\,z$ och $(z\,w)\,u = z\,(w\,u)$, vilket lätt kontrolleras:

Komplexa tal

$$z\,w = (a,\,b)\,(c,\,d) = (a\,c - b\,d,\,a\,d + b\,c) = w\,z.$$

$$\begin{aligned}(z\,w)\,u &= (a\,c - b\,d,\,a\,d + b\,c)\,(e,\,f)\\ &= ((a\,c - b\,d)\,e - (a\,d + b\,c)\,f,\,(a\,c - b\,d)\,f + (a\,d + b\,c)\,e)\\ &= (a\,(c\,e - d\,f) - b\,(c\,f + d\,e),\,a\,(c\,f + d\,e) + b\,(c\,e - d\,f))\\ &= z\,(w\,u).\end{aligned}$$

Som för vanliga (reella) tal finns även en distributiv lag:

$$z\,(w + u) = z\,w + z\,u,$$

vilket lätt verifieras.

Komplexa tal

Division i polära koordinater:

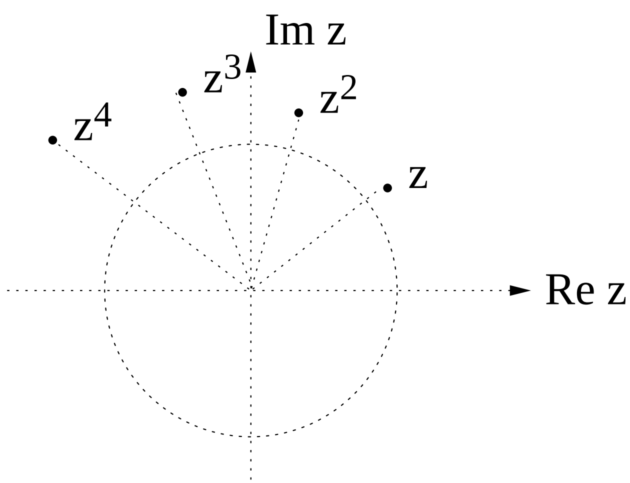
Har sett att *multiplikation* med $w = \rho\,(\cos(\phi), \sin(\phi))$ geometrisk motsvarar vridning vinkeln ϕ och längdskalning med faktorn $\rho = |w|$. Eftersom *division* med w motsvarar multiplikation med $\frac{1}{|w|^2}\,\bar{w}$ blir den geometriska motsvarigheten till division med w en vridning vinkeln $-\phi$ och längdskalning med faktorn $\frac{1}{|w|^2}\,|\bar{w}|$, dvs $1/|w|$.

Komplexa tal

Vi multiplikation av komplexa tal *adderas* alltså *argumenten*, dvs vinklarna för de komplexa talen, medan *beloppen multipliceras*.

Speciellt följer att $z^2 = r^2\,(\cos(2\,\theta), \sin(2\,\theta))$, och genom upprepning

$$z^n = |z|^n\,(\cos(n\,\theta), \sin(n\,\theta)).$$



Komplexa tal

Denna observation ger oss en möjlighet att lösa t.ex. ekvationen

$$z^n = w = \rho\,(\text{cos}(\phi),\, \text{sin}(\phi)),$$

där vi finner att

$$z = \rho^{1/n}\,(\text{cos}(\phi/n + j\,2\,\pi/n),\, \text{sin}(\phi/n + j\,2\,\pi/n)), \qquad j = 0,\, 1,\, 2,\, ..,\, n.$$

Komplexa tal

Algebrans fundamentalsats

säger att varje *algebraisk ekvation* på formen

$$p(z) = z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + a_{n-2}\, z^{n-2} + .. + a_1\, z + a_0 = 0,$$

dvs varje n*:te gradsekvation*, har precis n (ej nödvändigtvis distinkta, dvs alla olika) rötter.

Exempel:

Ekvationen $z^4 - 2\,z^3 + 2\,z^2 - 2\,z + 1 = (z-1)^2\,(z^2+1) = 0$ har rötterna $z_1 = z_2 = 1$ (dubbelrot) och $z_3 = i$ och $z_4 = -i$.

Komplexa tal

Resultatet följer av att varje sådan ekvation kan visas ha *minst en* rot, ty om z_1 är en rot följer ju med hjälp av division av $p(z)$ med $z - z_1$ att $p(z) = (z - z_1)\, q(z)$, där $q(z)$ är ett polynom av grad $n - 1$, ty division av $p(z)$ med $z - z_1$ ger ju

$$p(z) = (z - z_1)\, q(z) + C,$$

för något polynom av grad högst $n - 1$ och C en konstant, som dock måste vara $= 0$ eftersom $p(z_1) = 0$. Om samma resonemang nu tillämpas på ekvationen $q(z) = 0$ erhålles att

$$p(z) = (z - z_1)\,(z - z_2)\,..(z - z_n),$$

med n (komplexa) nollställen z_j, dvs rötter till $p(z) = 0$.

Komplexa tal

Exempel:

Ekvationen $z^2 - 2\,z^2 + 5 = (z-1)^2 + 4 = 0$ har lösningarna $z_1 = 1 + 2\,i$ och $z_2 = 1 - 2\,i$, och kan även skrivas (med komplex faktoruppdelning) som

$$(z - 1 - 2\,i)\,(z - 1 + 2\,i) = 0.$$

Notera att de två lösningarna är varandras konjugat. Detta är ingen slump:

Komplexa tal

Om n:te gradsekvationen $p(z) = 0$ har reella koefficienter och z är en lösning så är även $\bar{z}$ en lösning, ty

$$p(z) = 0 \Rightarrow p(\bar{z}) = \overline{p(z)} = \bar{0} = 0,$$

där vi utnyttjat att för komplexa tal u och w gäller $\overline{u + w} = \bar{u} + \bar{w}$ och $\overline{u\,w} = \bar{u}\,\bar{w}$. Detta tillämpat på summan i $p(z)$, och sedan på produkterna $a_j\,z^j$ i respektive term.

Komplexa tal

Exempel:

Ekvationen $z^2 - (2 - 4\,i)\,z - 3 + 5\,i = 0$ kan (efter kvadratkomplettering) skrivas
$(z - (1 - 2\,i))^2 = (1 - 2\,i)^2 + 3 - 5\,i = -9\,i$, med lösning
$z = 1 - 2\,i \pm 3\,($cos$(270°/2 + j\,360°/2),$ sin$(270°/2 + j\,360°/2))$,
$j = 0, 1$.