RÄKNEÖVNING

VECKA 4

David Heintz, 24 november 2002

Innehåll

1 Uppgift 34.1

Compute

a) $\int_0^x t\,\sin(2t)\,dt$

b) $\int_0^x t^2\,\cos(t)\,dt$

c) $\int_0^x t\,e^{-2t}\,dt$

Så var det dags att räkna integraler igen. Vi får tipset att använda oss av partiell integration (se tidigare räkneövningar), så låt oss göra det.

a)

$$\begin{aligned}\int_0^x t\sin(2t)\,dt &= \left[-\frac{1}{2}\,\cos(2t)\,t\right]_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x \cos(2t)\,dt \\ &= -\frac{1}{2}\,\cos(2x)\,x + \frac{1}{2}\,\left[\frac{1}{2}\,\sin(2t)\right]_0^x \\ &= -\frac{1}{2}\,\cos(2x)\,x + \frac{1}{4}\,\sin(2x).\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int_0^x t^2\,\cos(t)\,dt &= \left[\sin(t)\,t^2\right]_0^x - \int_0^x \sin(t)\,2t\,dt \\ &= \sin(x)\,x^2 - 2\,\left([-\cos(t)\,t]_0^x + \int_0^x \cos(t)\,dt\right) \\ &= \sin(x)\,x^2 + 2\,\cos(x)\,x - 2\,[\sin(t)]_0^x \\ &= \sin(x)\,\left(x^2-2\right) + 2\,\cos(x)\,x.\end{aligned}$$

c)

$$\int_0^x t\,e^{-2t}\,dt = \left[-\frac{1}{2}\,e^{-2t}\,t\right]_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-2t}\,dt$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\, e^{-2x}\, x + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2}\, e^{-2t} \right]_0^x \\
&= -\frac{1}{2}\, e^{-2x}\, x - \frac{1}{4} \left(e^{-2x} - 1 \right),
\end{aligned}
$$

och vi är klara.

2 Uppgift 34.2

Compute

a) $\int_1^x y\,\ln(y)\,dy$

b) $\int_1^x \ln(y)\,dy$

c) $\int_0^x \arctan(t)\,dt$

d) $\int_0^x e^{-t}\,\cos(2t)\,dt$

Återigen får vi rådet att ta till partiell integration - det är bara att fortsätta på det inslagna spåret.

a)

$$\begin{aligned}\int_1^x y\,\ln(y)\,dy &= \left[\frac{1}{2}\,y^2\,\ln(y)\right]_1^x - \frac{1}{2}\int_1^x y^2\,\frac{1}{y}\,dy\\ &= \frac{1}{2}\,x^2\,\ln(x) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\,y^2\right]_1^x\\ &= \frac{1}{2}\,x^2\,\ln(x) - \frac{1}{4}\,x^2 + \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int_1^x \ln(y)\,dy &= \int_1^x 1\cdot\ln(y)\,dy = [y\,\ln(y)]_1^x - \int_1^x y\,\frac{1}{y}\,dy\\ &= x\,\ln(x) - [y]_1^x = x\,\ln(x) - x + 1.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\int_0^x \arctan(t)\,dt &= \int_0^x \arctan(t)\cdot 1\,dt = [\arctan(t)\,t]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,dy\\ &= \arctan(x)\,x - \left[\frac{1}{2}\,\ln|1+t^2|\right]_0^x\\ &= \arctan(x)\,x - \frac{1}{2}\,\ln|1+x^2|.\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{-t}\cos(2t)\,dt &= \left[-e^{-t}\cos(2t)\right]_0^x - 2\int_0^x e^{-t}\sin(2t)\,dt\\ &= -e^{-x}\cos(2x) + 1 - 2\Big(\left[-e^{-t}\sin(2t)\right]_0^x +\\ &+ \int_0^x 2\,e^{-t}\cos(2t)\,dt\Big)\\ &= -e^{-x}\cos(2x) + 1 + 2e^{-x}\sin(2x) -\\ &- 4\int_0^x e^{-t}\cos(2t)\,dt,\end{aligned}$$

där vi får att

$$5\int_0^x e^{-t}\cos(2t)\,dt = -e^{-x}\cos(2x) + 1 + 2e^{-x}\sin(2x),$$

varför

$$\int_0^x e^{-t}\cos(2t)\,dt = \frac{1}{5}\left(e^{-x}\left(2\sin(2x) - \cos(2x)\right) + 1\right)$$

och vi är klara.

3 Uppgift 34.4

Compute by a suitable change of variable

a) $\int_0^x y\, e^{y^2}\, dy$

b) $\int_0^x y\, \sqrt{y-1}\, dy$

c) $\int_0^x \sin(t)\, \cos^2(t)\, dt$

Att beräkna integraler via variabelsubstitution har vi också tränat på förut. Här kommer ytterligare tre exempel. Att veta vilket byte man skall göra kan vara svårt; det finns integrander där den förenklande substitutionen inte är lätt att komma på. Ofta lönar det sig om man prövar att byta ut "det som ser konstigt ut". Vad jag menar med det visas förmodligen bäst när vi löser uppgifterna.

a)

$$\begin{aligned}\int_0^x y\, e^{y^2}\, dy &= \left[\begin{array}{rcl} y^2 &=& t \\ 2y\, dy &=& dt \\ y=x &\Leftrightarrow& t=x^2 \\ y=0 &\Leftrightarrow& t=0 \end{array}\right] = \int_0^{x^2} \frac{1}{2}\, e^t\, dt \\ &= \frac{1}{2}\left[e^t\right]_0^{x^2} = \frac{1}{2}\left(e^{x^2}-1\right).\end{aligned}$$

b)

Notera att uppgiften är felformulerad i AMBS; den nedre integrationsgränsen skall vara 1 och inte 0.

$$\begin{aligned}\int_1^x y\, \sqrt{y-1}\, dy &= \left[\begin{array}{rcl} \sqrt{y-1} &=& t \\ y-1 &=& t^2 \\ dy &=& 2t\, dt \\ y=x &\Leftrightarrow& t=\sqrt{x-1} \\ y=1 &\Leftrightarrow& t=0 \end{array}\right] = \int_0^{\sqrt{x-1}} \left(t^2+1\right)\, 2t^2\, dt \\ &= 2\int_0^{\sqrt{x-1}} \left(t^4+t^2\right)\, dt = 2\left[\frac{1}{5}\, t^5 + \frac{1}{3}\, t^3\right]_0^{\sqrt{x-1}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\left(\frac{1}{5}(x-1)^2\sqrt{x-1}+\frac{1}{3}\,(x-1)\sqrt{x-1}\right)\\
&= 2\left((x-1)\sqrt{x-1}\left(\frac{1}{5}\,(x-1)+\frac{1}{3}\right)\right).
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
\int_0^x \sin(t)\,\cos^2(t)\,dt &= \left[\begin{array}{rcl} \cos(t) &=& s,\ 0\le t\le\pi \\ -\sin(t)\,dt &=& ds \\ t=x &\Leftrightarrow& s=\cos(x) \\ t=0 &\Leftrightarrow& s=1 \end{array}\right] = -\int_1^{\cos(x)} s^2\,ds\\
&= -\left[\frac{1}{3}s^3\right]_0^{\cos(x)} = -\frac{1}{3}\left(\cos^3(x)-1\right).
\end{aligned}
$$

Märk att vi i variabelbytet har inskränkt lösningen till att gälla på intervallet $[0,\,\pi]$. Detta för att avbildningen skall vara injektiv. Med andra ord vill vi att varje värde i den gamla variabeln skall motsvaras av precis ett i den nya. Här måste man ta hänsyn till att $\cos(x)$ är en periodisk funktion.

Vi är klara.

4 Uppgift 34.5

Compute

a) $\int_0^x \frac{1}{y^2-y-2}\, dy$

b) $\int_0^x \frac{y^3}{y^2+2y-3}\, dy$

c) $\int_0^x \frac{1}{y^2+2y+5}\, dy$

d) $\int_0^x \frac{y-y^2}{(y-1)\,(y^2+2y+5)}\, dy$

e) $\int_0^x \frac{y^4}{(y-1)\,(y^2+y-6)}\, dy$

Att lösa integraler som innehåller rationella funktioner kan bli jobbigt - i regel får vi mycket att skriva och hålla ordning på. I dessa fem exempel är räknegången ändå förhållandevis rättfram. Först och främst försöker vi, om möjligt, att förenkla uttrycket, exempelvis via polynomdivision. Därefter kvadratkompletteras nämnaren följt av partialbråksuppdelning (se lösningsförslaget jag skickade ut i ALA-a till Kenneths länk *some extras*). Den resulterande integralen, eller rättare sagt integralerna, brukar gå att lösa utan allt för mycket slit.

a)

$$\int_0^x \frac{1}{y^2-y-2}\, dy = \int_0^x \frac{1}{(y+1)(y-2)}\, dy,$$

varpå partialbråksuppdelning ger

$$\begin{aligned} \frac{1}{(y+1)(y-2)} &= \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-2} \\ 1 &= A(y-2) + B(y+1), \end{aligned}$$

ur vilket vi identifierar A och B genom att lösa det linjära ekvationssystemet

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} A & + & B & = & 0 \\ -2A & + & B & = & 1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} A & + & B & = & 0 \\ & & 3B & = & 1 \end{array} \right.$$

där vi får att $(A,\, B) = \left(-\frac{1}{3},\, \frac{1}{3}\right)$. Med andra ord kan vi skriva

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{(y+1)(y-2)}\,dy &= -\frac{1}{3}\int_0^x \frac{1}{y+1}\,dy + \frac{1}{3}\int_0^x \frac{1}{y-2}\,dy \\
&= -\frac{1}{3}\left[\ln|y+1|\right]_0^x + \frac{1}{3}\left[\ln|y-2|\right]_0^x = \\
&= \frac{1}{3}\left(-\ln|x+1| + \ln|x-2| - \ln(2)\right).
\end{aligned}$$

b)

$$\int_0^x \frac{y^3}{y^2+2y-3}\,dy = \int_0^x (y-2) + \frac{7y-6}{y^2+2y-3}\,dy,$$

efter en inledande polynomdivison (gör den själva!). Vi har alltså

$$\int_0^x \frac{y^3}{y^2+2y-3}\,dy = \underbrace{\int_0^x (y-2)\,dy}_{I_1} + \underbrace{\int_0^x \frac{7y-6}{y^2+2y-3}}_{I_2}$$

med

$$I_1 = \left[\frac{1}{2}y^2 - 2y\right]_0^x = \frac{1}{2}x^2 - 2x.$$

För att lösa I_2 tar vi till partialbråksuppdelning

$$\begin{aligned}
\frac{7y-6}{y^2+2y-3} &= \frac{7y-6}{(y+3)(y-1)} = \frac{A}{y+3} + \frac{B}{y-1} \\
7y+6 &= A(y-1) + B(y+3),
\end{aligned}$$

vilket leder till systemet

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} A & + & B & = & 7 \\ -A & + & 3B & = & -6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} A & + & B & = & 7 \\ & & 4B & = & 1 \end{array}\right.$$

med lösningen $(A, B) = \left(\frac{27}{4},\, \frac{1}{4}\right)$. Vi får att I_2 är detsamma som

$$
\begin{aligned}
\int_0^x \frac{7y-6}{y^2+2y-3}\,dy &= \frac{27}{4}\int_0^x \frac{1}{y+3}\,dy + \frac{1}{4}\int_0^x \frac{1}{y-1}\,dy \\
&= \frac{27}{4}\left[\ln|y+3|\right]_0^x + \frac{1}{4}\left[\ln|y-1|\right]_0^x = \\
&= \frac{27}{4}\left(\ln|x+3| - \ln(3)\right) + \frac{1}{4}\ln|x-1|,
\end{aligned}
$$

varför

$$
\int_0^x \frac{y^3}{y^2+2y-3}\,dy = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{4}\left(27\ln|x+3| - 27\ln(3) + \ln|x-1|\right).
$$

c)

Den här deluppgiften är lite annorlunda mot tidigare, i den mening att vi använder oss av variabelsubstitution. Det visar sig även vara lönt att kunna derivatan av $\arctan(x)$.

$$
\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{y^2+2y+5}\,dy &= \int_0^x \frac{1}{(y+1)^2+4}\,dy = \begin{bmatrix} y+1 & = & t \\ dy & = & dt \\ y=x & \Leftrightarrow & t=x+1 \\ y=0 & \Leftrightarrow & t=1 \end{bmatrix} \\
&= \int_1^{x+1} \frac{1}{t^2+4}\,dt = \frac{1}{4}\int_1^{x+1} \frac{1}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}\,dt \\
&= \frac{1}{4}\left[2\arctan\left(\frac{t}{2}\right)\right]_1^{x+1} \\
&= \frac{1}{2}\left(\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Notera att en nämnare med ett andragradspolynom kan kvadratkompletteras (precis som här), där ett resulterande kvadratiskt uttryck tillsammans med en konstant (vi hade $(y+1)^2+4$), gör det möjligt för oss att skriva om integralen så att den primitiva funktionen blir just $\arctan(x)$. Detta förfarande återkommer i nästa exempel.

d)

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{y-y^2}{(y-1)(y^2+2y+5)}\,dy &= \int_0^x \frac{y(1-y)}{(y-1)(y^2+2y+5)}\,dy \\
&= -\int_0^x \frac{y}{y^2+2y+5}\,dy \\
&= -\int_0^x \frac{y}{(y+1)^2+4}\,dy
\end{aligned}$$

och med samma substitution som i c) erhålles

$$\int_0^x \frac{y-y^2}{(y-1)(y^2+2y+5)}\,dy = -\int_1^{x+1} \frac{t-1}{t^2+4}\,dt.$$

Vi skriver om integralen som en summa av två delintegraler

$$\int_0^x \frac{y-y^2}{(y-1)(y^2+2y+5)}\,dy = \underbrace{\int_1^{x+1} \frac{1}{t^2+4}\,dt}_{I_1} - \underbrace{\int_1^{x+1} \frac{t}{t^2+4}\,dt}_{I_2},$$

där vi från c) vet att

$$I_1 = \frac{1}{2}\left(\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right).$$

Återstår gör att lösa I_2. Man får att

$$\begin{aligned}
-\int_1^{x+1} \frac{t}{t^2+4}\,dt &= -\left[\frac{1}{2}\ln|t^2+4|\right]_1^{x+1} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\ln\left((x+1)^2+4\right) - \ln(5)\right).
\end{aligned}$$

Vårt svar blir alltså

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{y-y^2}{(y-1)(y^2+2y+5)}\,dy &= \frac{1}{2}\left(\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) - \\
&- \frac{1}{2}\left(\ln\left((x+1)^2+4\right) - \ln(5)\right).
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{y^4}{(y-1)(y^2+y-6)}\,dy &= \int_0^x \frac{y^4}{y^3-7y+6}\,dy \\ &= \int_0^x \left(y + \frac{7y^2-6y}{y^3-7y+6}\right)dy,\end{aligned}$$

där vi först har multiplicerat parentesuttrycken i nämnaren följt av polynomdivison. Precis som tidigare löser vi uppgiften genom att dela upp den ursprungliga integralen

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{y^4}{(y-1)(y^2+y-6)}\,dy &= \int_0^x y\,dy + \int_0^x \frac{7y^2-6y}{y^3-7y+6}\,dy \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \underbrace{\int_0^x \frac{7y^2-6y}{(y-1)(y-2)(y+3)}\,dy}_{I}\end{aligned}$$

där vi faktoriserat I:s nämnare genom att identifiera polynomets tre rötter (prövar att finna nollställen via insättning). Anledningen till det är, som ni kanske anar, att det väntar en partialbråksuppdelning om hörnet ...

Vi gör ansatsen

$$\begin{aligned}\frac{7y^2-6y}{(y-1)(y-2)(y+3)} &= \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y-2} + \frac{C}{y+3} \\ 7y^2-6y &= A\underbrace{(y-2)(y+3)}_{y^2+y-6} + B\underbrace{(y-1)(y+3)}_{y^2+2y-3} + \\ &+ C\underbrace{(y-1)(y-2)}_{y^2-3y+2}\end{aligned}$$

vilket leder till ekvationssystemet

$$\begin{cases} A + B + C = 7 \\ A + 2B - 3C = -6 \\ -6A - 3B + 2C = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} A + B + C = 7 \\ B - 4C = -13 \\ 3B + 8C = 42 \end{cases}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} A & + & B & + & C & = & 7 \\ & & B & - & 4C & = & -13 \\ & & & & 20C & = & 81 \end{array}\right.$$

vars lösning $(A,\, B,\, C) = \left(-\frac{1}{4},\, \frac{16}{5},\, \frac{81}{20}\right)$ fås via Gausseliminering. Vi kan nu skriva

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{4}\int_0^x \frac{1}{y-1}\,dy + \frac{16}{5}\int_0^x \frac{1}{y-2}\,dy + \frac{81}{20}\int_0^x \frac{1}{y+3}\,dy \\ &= -\frac{1}{4}\left[\ln|y-1|\right]_0^x + \frac{16}{5}\left[\ln|y-2|\right]_0^x + \frac{81}{20}\left[\ln|y+3|\right]_0^x \\ &= -\frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{16}{5}\left(\ln|x-2| - \ln(2)\right) + \frac{81}{20}\left(\ln|x+3| - \ln(3)\right). \end{aligned}$$

Svaret på sista deluppgiften blir därmed

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{y^4}{(y-1)(y^2+y-6)}\,dy &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{16}{5}\left(\ln|x-2| - \ln(2)\right) + \\ &+ \frac{81}{20}\left(\ln|x+3| - \ln(3)\right). \end{aligned}$$

5 Uppgift 34.7

Compute

a) $\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(x)\, dx$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x)\, dx$

c) $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin^2(x)\, dx$

d) $\int_{-\pi}^{\pi} \arctan(x + 3x^3)\, dx$

Vid första anblicken kanske en del av dessa integraler ser rent av hemska ut. Men faktum är att de går att lösa på bara någon rad om ens det! Vi har tidigare talat om jämna och udda funktioner. Något trevligt med dessa funktioner är att deras integraler ibland är lätta att lösa, särskilt när intervallet är symmetriskt kring nollan. Vi minns att en jämn funktion är sin egen spegelbild i vertikalaxeln (ges av att $f(x) = f(-x)$), medan en udda på samma sätt speglar sig i en tänkt rät linje dragen från andra till fjärde kvadranten genom origo (fås om $-f(x) = f(-x)$). Sist i uppgiften visas plottar över respektive funktionsgraf för att göra det lite tydligare. Innan vi löser integralerna skall det sägas att produkten av två udda eller jämna funktioner resulterar i en jämn funktion, där produkten av en udda och en jämn samtidigt ger en udda funktion.

a)

Både $|x|$ och $\cos(x)$ är jämna funktioner precis som deras produkt. Därmed kan vi beräkna integralen som dubbla värdet av samma integral över positiva reella axeln. Vi använder oss av partiell integration. Notera att $|x| = x$ för $x > 0$.

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(x)\, dx &= 2\int_0^{\pi} x \cos(x)\, dx = 2\left(\underbrace{[\sin(x)\, x]_0^{\pi}}_{=0} - \int_0^{\pi} \sin(x)\, dx\right) \\ &= 2\,[\cos(x)]_0^{\pi} = 2(-1-1) = -4.\end{aligned}$$

b)

Kvadraten av en udda funktion som $\sin(x)$ är jämn. Vi utnyttjar också sambandet $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$. Man får att

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x)\,dx &= 2\int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx = 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left(1-\cos(2x)\right)\,dx \\
&= \int_0^{\pi} dx - \int_0^{\pi} \cos(2x)\,dx = \pi - \underbrace{\left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\pi}}_{=0} = \pi.
\end{aligned}$$

c)

Vi har produkten av en udda (x) och en jämn funktion ($\sin^2(x)$), varför integranden måste vara udda. Integraler av udda funktioner över symmetriska intervall är nog mina favoriter, ty

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\,\sin^2(x)\,dx = 0,$$

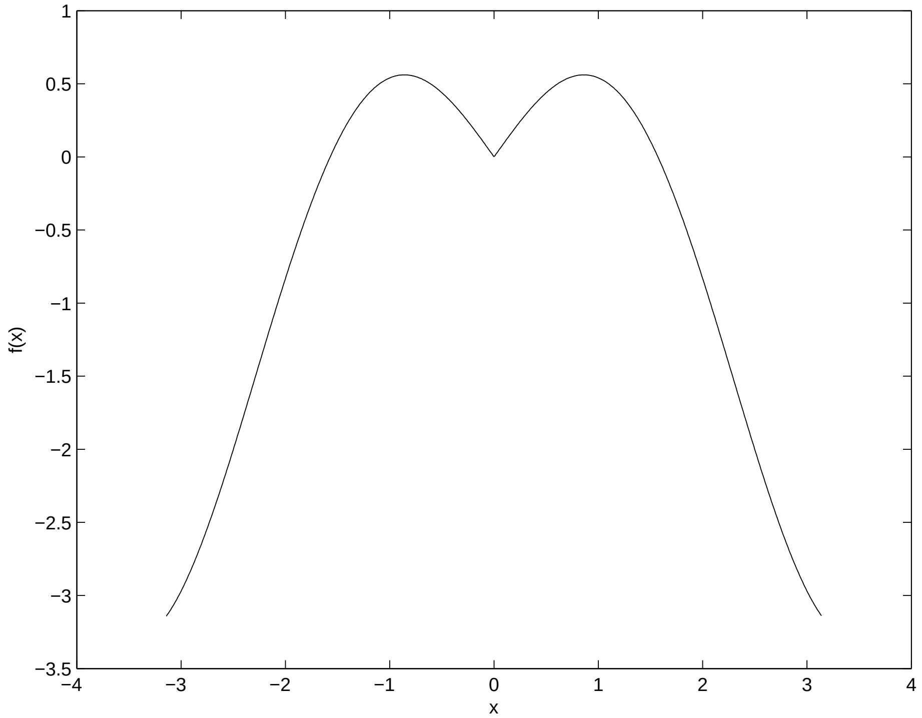
vilket inses när man ser funktionsgrafen (minns att integralen ger oss nettoarean mellan grafen och x-axeln).

d)

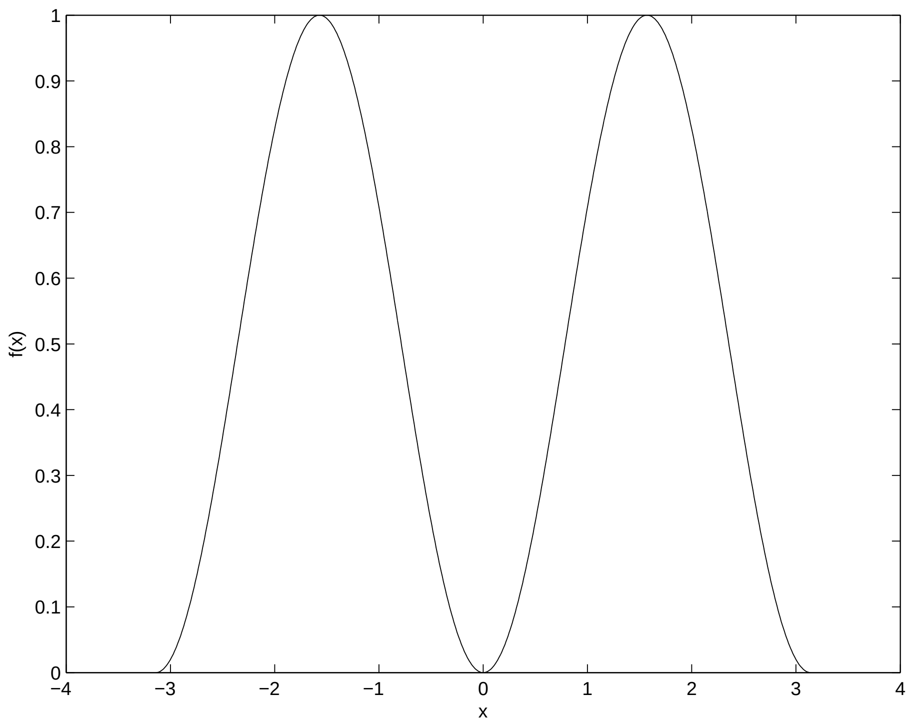
$\arctan(x+3x^3)$ är en udda funktion och livet leker!

$$\int_{-\pi}^{\pi} \arctan(x+3x^3)\,dx = 0.$$

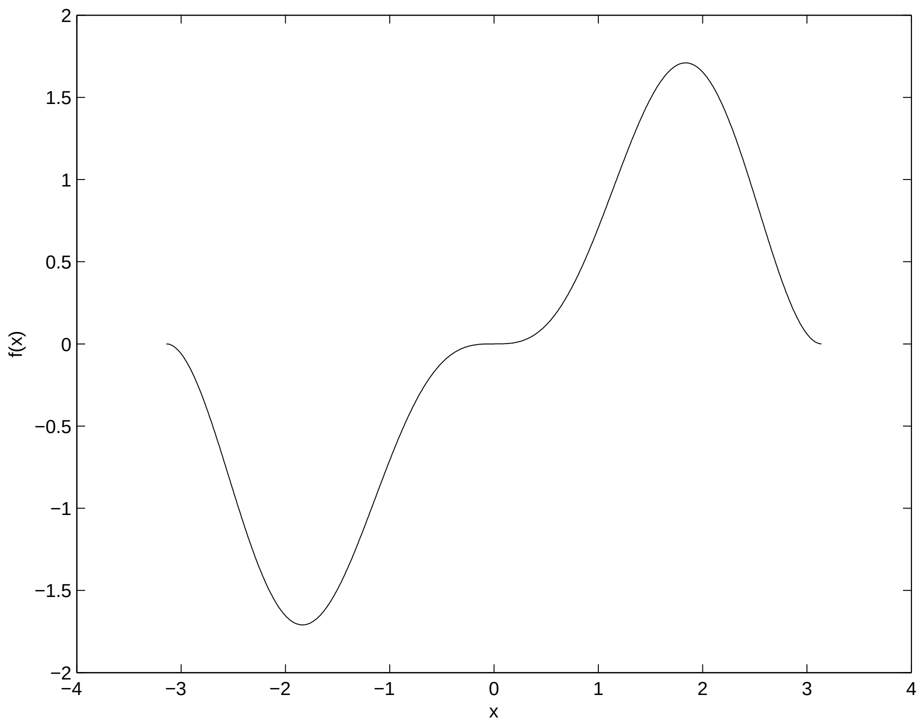
Vi är klara.



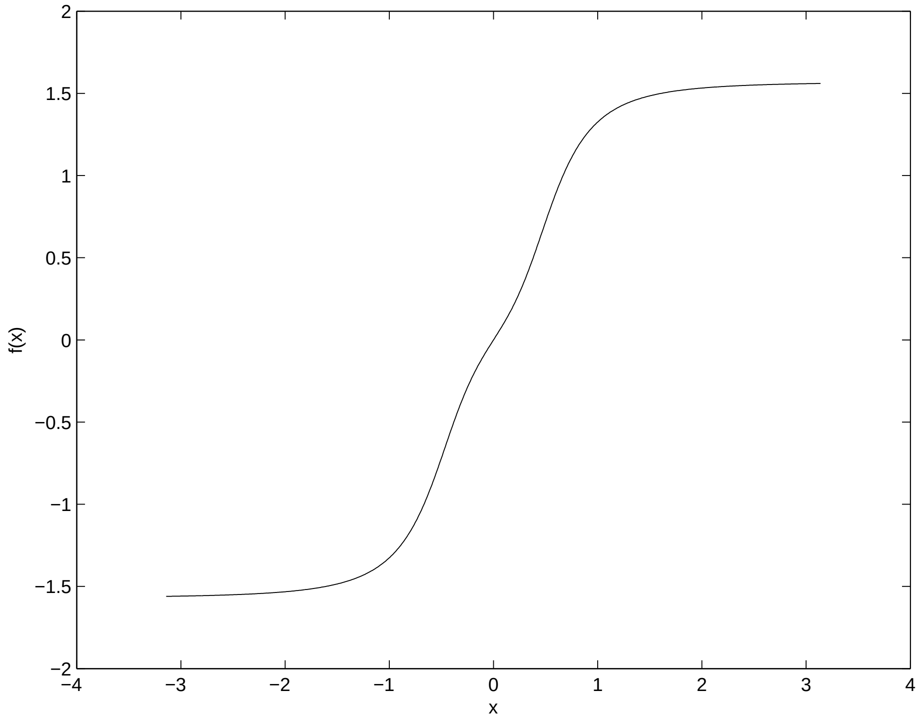
Figur 1: $f(x) = |x| \cos(x)$



Figur 2: $f(x) = \sin^2(x)$



Figur 3: $f(x) = x\,\sin^2(x)$



Figur 4: $f(x) = \arctan(x + 3x^3)$

6 Uppgift 35.4

Solve the following initial value problems

a) $x\,u'(x) + u(x) = x,\ u(1) = \frac{3}{2},\ x > 1$

b) $u'(x) + 2x\,u(x) = x,\ u(0) = 1,\ x > 0$

c) $u'(x) = \frac{x+u(x)}{2},\ u(0) = 0,\ x > 0$

Så var det dags att lösa våra första ODEs på formen $u'(x) = f(x, u(x))$. Det innebär en extra svårighet mot tidigare, eftersom de differentialekvationerna kunde skrivas $u'(x) = f(x)$, och lösas via direkt integration. Riktigt så lätt är det inte nu, men det finns ett par knep att ta till. Ett av de vanligaste är metoden med *integrerande faktor*. Givet en inhomogen, linjär ODE av första ordningen

$$u'(x) + m(x)u(x) = N(x),$$

kan vi nämligen multiplicera båda leden med $e^{M(x)}$, där $M(x)$ är en primitiv till $m(x)$. Anledningen till det är att VL efteråt kan uttryckas som en derivata, varefter enkel integration ger oss det sökta $u(x)$. Har vi otur går det inte att finna någon explicit lösning till problemet, utan man får nöja sig med en implicit dito på integralform. Hursomhelst ges att

$$\begin{aligned}
e^{M(x)}u'(x) + e^{M(x)}m(x)u(x) &= e^{M(x)}N(x) \\
\frac{d}{dx}\left(e^{M(x)}u(x)\right) &= e^{M(x)}N(x) \\
\int_a^x \frac{d}{dy}\left(e^{M(y)}u(y)\right)\,dy &= \int_a^x e^{M(y)}N(y)\,dy \\
e^{M(x)}u(x) - e^{M(a)}u(a) &= \int_a^x e^{M(y)}N(y)\,dy \\
u(x) &= e^{M(a)-M(x)}u(a) + \\
&+ e^{-M(x)}\int_a^x e^{M(y)}N(y)\,dy,
\end{aligned}$$

med a som en godtycklig startpunkt. Att VL i steg 1 och 2 överensstämmer följer genom produktregeln för derivatan. Den återstående svårigheten är att lösa integralen i HL. I exemplen visar det sig emellertid vara en småsak.

a)

Vi har för $x > 1$ att lösa

$$\begin{cases} x\,u'(x) + u(x) & = & x \\ u(1) & = & \frac{3}{2} \end{cases}$$

vilket görs genom att skriva

$$u'(x) + \frac{1}{x}u(x) = 1,$$

då vi ofta vill att koefficienten framför $u'(x)$ (dvs. den högsta förekommande derivatan till ordningen) ska vara 1. Lustigt(?) nog visar det sig att den följande multiplikationen med vår integrerande faktor ger tillbaka ursprungsformen eftersom

$$e^{\int \frac{1}{x}\,dx} \quad = \quad e^{\ln(x)} = x.$$

Att ändå göra på det här sättet kan dock vara en god vana. Låt oss nu skriva om VL i den givna ODEn som en derivata och vi får

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(x\,u(x)\right) &= x \\ \int_1^x \frac{d}{dy}(y\,u(y))\,dy &= \int_1^x y\,dy \\ \left[y\,u(y)\right]_1^x &= \left[\frac{1}{2}y^2\right]_1^x \\ x\,u(x) - u(1) &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \\ x\,u(x) &= 1 + \frac{1}{2}x^2 \\ u(x) &= \frac{1}{x} + \frac{x}{2} = \frac{2+x^2}{2x}. \end{aligned}$$

b)

För $x > 0$ ska vi lösa begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} u'(x) + 2x\,u(x) & = & x \\ u(0) & = & 1 \end{cases}$$

där vi har den integrerande faktorn

$$e^{\int 2x\,dx} \;=\; e^{x^2}.$$

På samma sätt som ovan får vi

$$\begin{aligned}
e^{x^2}\,u'(x) + e^{x^2}\,2x\,u(x) &= e^{x^2}\,x \\
\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\,u(x)\right) &= e^{x^2}\,x \\
\int_0^x \frac{d}{dy}\left(e^{y^2}\,u(y)\right)\,dy &= \int_0^x y\,e^{y^2}\,dy \\
e^{x^2}\,u(x) - u(0) &= \int_0^x y\,e^{y^2}\,dy \\
u(x) &= e^{-x^2}\left(1 + \int_0^x y\,e^{y^2}\,dy\right).
\end{aligned}$$

Notera att derivatan i andra steget alltid tas för produkten av den integrerande faktorn och $u(x)$. För att få en explicit lösning måste vi även reda ut integralen. Det ges att

$$\begin{aligned}
\int_0^x y\,e^{y^2}\,dy &= \left[\begin{array}{rcl} y^2 &=& t \\ 2y\,dy &=& dt \\ y = x &\Leftrightarrow& t = x^2 \\ y = 0 &\Leftrightarrow& t = 0 \end{array}\right] = \int_0^{x^2} \frac{1}{2}\,e^t\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[e^t\right]_0^{x^2} = \frac{1}{2}\left(e^{x^2} - 1\right),
\end{aligned}$$

varför

$$u(x) \;=\; e^{-x^2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(e^{x^2} - 1\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-x^2}\right).$$

c)

I den sista deluppgiften har vi för $x > 0$ att

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'(x) &=& \frac{x+u(x)}{2} \\ u(0) &=& 0 \end{array}\right.$$

dvs. att

$$u'(x) - \frac{1}{2}u(x) = \frac{1}{2}x.$$

Den integrerande faktorn ges av

$$e^{\int -\frac{1}{2}\,dx} \quad = \quad e^{-\frac{1}{2}x}$$

och vi får att

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{1}{2}x}\,u'(x) - \frac{1}{2}\,e^{-\frac{1}{2}x}\,u(x) &= \frac{1}{2}\,e^{-\frac{1}{2}x}\,x \\
\frac{d}{dx}\Big(e^{-\frac{1}{2}x}\,u(x)\Big) &= \frac{1}{2}\,e^{-\frac{1}{2}x}\,x \\
\int_0^x \frac{d}{dy}\Big(e^{-\frac{1}{2}y}\,u(y)\Big)\,dy &= \int_0^x \frac{1}{2}\,e^{-\frac{1}{2}y}\,y\,dy \\
e^{-\frac{1}{2}x}\,u(x) - u(0) &= \int_0^x \frac{1}{2}\,e^{-\frac{1}{2}y}\,y\,dy \\
u(x) &= \frac{1}{2}\,e^{\frac{1}{2}x}\int_0^x e^{-\frac{1}{2}y}\,y\,dy.
\end{aligned}$$

Integralen löses t.ex. via partiell integration

$$\begin{aligned}
\int_0^x e^{-\frac{1}{2}y}\,y\,dy &= \Big[-2\,e^{-\frac{1}{2}y}\,y\Big]_0^x + 2\int_0^x e^{-\frac{1}{2}}\,dy \\
&= -2\,e^{-\frac{1}{2}x}\,x + 2\Big[-2\,e^{-\frac{1}{2}y}\Big]_0^x \\
&= -2\,e^{-\frac{1}{2}x}\,x - 4\Big(e^{-\frac{1}{2}x} - 1\Big)
\end{aligned}$$

vilket ger oss den sökta lösningen

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{1}{2}\,e^{\frac{1}{2}x}\,\Big(-2\,e^{-\frac{1}{2}x}\,x - 4\Big(e^{-\frac{1}{2}x} - 1\Big)\Big) \\
&= -x - 2 + 2\,e^{\frac{1}{2}x},
\end{aligned}$$

och vi är klara.

7 Uppgift 36.1

If possible compute the following integrals

a) $\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$

b) $\int_{-\infty}^\infty x\,e^{-x^2}\,dx$

c) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$

d) $\int_0^\pi \frac{\cos(x)}{(1-\sin(x))^{\frac{1}{3}}}\,dx$

Vi skall nu ta oss en titt på s.k. *generaliserade integraler*. Tidigare har vi stött på integraler av begränsade funktioner på begränsade intervall, men så behöver inte alltid vara fallet. Frågan som dyker upp i sammanhanget är om integralen överhuvud kan beräknas - är den konvergent eller divergent? Låt oss försöka med uppgifterna.

a)

Den övre integrationsgränsen går tydligen mot ∞. Vi kommer därför att beräkna motsvarande gränsvärde (notera att vi ersätter ∞ med N) enligt

$$\begin{aligned}\int_0^N \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx &= \left[\begin{array}{rcl} 1+x^2 &=& t \\ 2x\,dx &=& dt \\ x=N &\Leftrightarrow& t=N \\ x=0 &\Leftrightarrow& t=1 \end{array}\right] = \int_1^N \frac{1}{2}\frac{1}{t^2}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{t}\right]_1^N = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{N}+1\right) \to \frac{1}{2},\ \text{när } N\to\infty.\end{aligned}$$

Integralen är med andra ord konvergent och har värdet $\frac{1}{2}$.

b)

På integrationsintervallet ser vi att integralen är generaliserad. Men vi noterar även att integranden är udda (ty x är en udda samt e^{-x^2} en jämn funktion) och då intervallet dessutom är symmetriskt följer att

$$\int_{-\infty}^\infty x\,e^{-x^2}\,dx = 0$$

utan att vi behöver göra några beräkningar.

c)

Av integranden att döma är funktionen inte begränsad i höger ändpunkt, och därmed är integralen generaliserad. Vi beräknar därför gränsvärdet

$$\int_0^N \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^N = -2\left(\sqrt{1-N}-1\right) \to 2, \text{ när } N \to 1,$$

och konstaterar att integralen är konvergent.

d)

Den sista deluppgiften ser inte särskilt roligt ut. Integralen verkar inte vara generaliserad, men med en sådan integrand kan man hålla sig för skratt. Vi gör dock ett försök med variabelsubstitution. För den sakens skull delar vi först upp integralen i två delintegraler (annars blir inte avbildningen injektiv).

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \frac{\cos(x)}{(1-\sin(x))^{\frac{1}{3}}}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{(1-\sin(x))^{\frac{1}{3}}}\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos(x)}{(1-\sin(x))^{\frac{1}{3}}}\,dx \\
&= \left[\begin{array}{ccc} \sin(x) & = & t \\ \cos(x)\,dx & = & dt \\ x=\pi & \Leftrightarrow & t=0 \\ x=\frac{\pi}{2} & \Leftrightarrow & t=1 \\ x=0 & \Leftrightarrow & t=0 \end{array}\right] = \\
&= \int_0^1 \frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{3}}}\,dx + \int_1^0 \frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{3}}}\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{3}}}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{3}}}\,dx = 0,
\end{aligned}$$

efter att vi “kastat om” integrationsgränserna i den andra delintegralen. Man behöver alltså inte beräkna integralen överhuvudtaget; tack vare variabelbytet klarar vi oss undan.

Vi är klara.