1. (a) Partiell integration:

$$\int_0^2 y\cosh(3y)\,dy = \Big[\tfrac{1}{3}y\sinh(3y)\Big]_0^2 - \int_0^2 \tfrac{1}{3}\sinh(3y)\,dy$$
$$= \tfrac{2}{3}\sinh(6) - \Big[\tfrac{1}{9}\cosh(3y)\Big]_0^2 = \tfrac{2}{3}\sinh(6) - \tfrac{1}{9}\cosh(6) + \tfrac{1}{9}.$$

(b)

$$u(x) = \int_0^x |y|\,dy = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x (-y)\,dy = \Big[-\tfrac{1}{2}y^2\Big]_0^x = -\tfrac{1}{2}x^2, & x \le 0, \\ \displaystyle\int_0^x y\,dy = \Big[\tfrac{1}{2}y^2\Big]_0^x = \tfrac{1}{2}x^2, & x \ge 0, \end{cases}$$

(c)

$$u(x) = u_a + \int_a^x f(y)\,dy = 1 + \int_1^x y^3\,dy = 1 + \Big[\tfrac{1}{4}y^4\Big]_1^x = \tfrac{1}{4}(3 + x^4).$$

(d)

$$\int_0^{u(x)} u^{-1/2}\,du = \int_0^x dy \Rightarrow \Big[\frac{u^{1/2}}{1/2}\Big]_0^{u(x)} = x \Rightarrow \sqrt{u(x)} = \frac{x}{2} \Rightarrow u(x) = \tfrac{1}{4}x^2.$$

2.

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3$$
$$c = A^2x = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}$$
$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

3. (a)

$$N(A) = \Big\{x \in \mathbf{R}^4 : Ax = 0\Big\}.$$
$$u, v \in N(A),\ \alpha, \beta \in \mathbf{R} \Rightarrow A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av = 0 \Rightarrow \alpha u + \beta v \in N(A).$$

(b) Gauss eliminationsmetod leder till den ekvivalenta matrisen

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ekvationssystemet $Ax = 0$ är ekvivalent med

$$x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0,$$
$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0,$$

med lösningarna $x_4 = s$, $x_3 = t$, $x_2 = -2x_3 - 3x_4 = -2t - 3s$, $x_1 = -2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = t + 2s$, där s, t är godtyckliga, dvs

$$x = \begin{bmatrix} t + 2s \\ -2t - 3s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vektorerna

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

är en bas för $N(A)$.

(c) För trappstegsmatrisen ovan gäller $\det(\tilde{A}) = 0$ och därför har vi $\det(A) = 0$ och A är singulär.

(d) Ovanstående visar att $N(A) \neq \{0\}$, vilket medför att en eventuell lösning till $Ax = b$ inte är unik. Lösningsmängden till $Ax = b$ är mängden av alla vektorer $x = x_h + x_p$, där $Ax_h = 0$ och $Ax_p = b$, dvs $x_h \in N(A)$. Eftersom det finns oändligt många element i $N(A)$ finns det antingen oändligt många lösningar (om $b \in R(A)$) eller ingen lösning (om $b \notin R(A)$).

(e) Vi ortogonaliserar basen v_1, v_2 med hjälp av Gram-Schmidts process:

$$w_1 = v_1, \quad \text{normalisera: } q_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$w_2 = v_2 - sq_1, \quad \text{vi bestämmer } s \text{ så att } (w_2, q_1) = 0:$$

$$0 = (w_2, q_1) = (v_2, q_1) - s(q_1, q_1) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - s = \frac{8}{\sqrt{6}} - s,$$

$$w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{8}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \text{normalisera: } q_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

4. (a) Vi multiplicerar med den integrerande faktorn e^{at}:

$$\frac{d}{dt}\big(e^{at}u(t)\big) = e^{at}u'(t) + ae^{at}u(t) = e^{at}f(t).$$

Integration ger

$$\begin{aligned} \Big[e^{at}u(t)\Big]_0^T &= \int_0^T e^{at} f(t)\, dt, \\ e^{aT}u(T) - u(0) &= \int_0^T e^{at} f(t)\, dt, \\ e^{at}u(t) &= u_0 + \int_0^t e^{as} f(s)\, ds, \\ u(t) &= e^{-at}u_0 + \int_0^t e^{-a(t-s)} f(s)\, ds. \end{aligned}$$

(b) Med $f(t) = \bar{f}$ i ovanstående formel får vi

$$u(t) = e^{-at}u_0 + \bar{f} \int_0^t e^{-a(t-s)}\, ds = \begin{cases} e^{-at}u_0 + \bar{f}\dfrac{1 - e^{-at}}{a}, & a \neq 0, \\ u_0 + \bar{f}t, & a = 0. \end{cases}$$

Enda möjligheten att få ett gränsvärde då $t \to \infty$ är att $a > 0$, så att $e^{-at} \to 0$ och

$$u(t) \to \bar{u} = \bar{f}/a, \quad \text{då } t \to \infty.$$

Vi har

$$\bar{u}' + a\bar{u} = a\bar{u} = \bar{f},$$

dvs $\bar{u}$ är en stationär lösning. Vi får $\bar{u} = 0.5$ om $a = 2\bar{f}$ och u_0 godtycklig.

(c) Med $v(t) = u(t) - \bar{u}$ får vi $v'(t) + av(t) = u'(t) + au(t) + a\bar{u} = f(t) - \bar{f}$ och $v(0) = u(0) - \bar{u}$. Lösningsformeln i (a) ger sedan

$$v(t) = e^{-at}(u_0 - \bar{u}) + \int_0^t e^{-a(t-s)}(f(s) - \bar{f})\,ds.$$

Triangelolikheten ger nu, om $a > 0$, $|u_0 - \bar{u}| \leq \epsilon$ och $|f(t) - \bar{f}| \leq \delta$,

$$\begin{aligned}
|v(t)| &= \left| e^{-at}(u_0 - \bar{u}) + \int_0^t e^{-a(t-s)}(f(s) - \bar{f})\,ds \right| \\
&\leq \left| e^{-at}(u_0 - \bar{u}) \right| + \left| \int_0^t e^{-a(t-s)}(f(s) - \bar{f})\,ds \right| \\
&\leq e^{-at}|u_0 - \bar{u}| + \int_0^t e^{-a(t-s)}|f(s) - \bar{f}|\,ds \\
&\leq e^{-at}\epsilon + \int_0^t e^{-a(t-s)}\delta\,ds \\
&= e^{-at}\epsilon + \delta\frac{1 - e^{-at}}{a} \leq \epsilon + \delta/a.
\end{aligned}$$

(d) Ovanstående visar att $\bar{u} = \bar{f}/a$ är en stabil stationär punkt om $a > 0$.

5. Funktionen $\sin(x)$ definieras som lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned}
&u'' + u = 0, \\
&u(0) = 0, \ u'(0) = 1,
\end{aligned}$$

Man skriver detta som ett system av första ordningen: $w_1 = u$, $w_2 = u'$ och

$$w' = Aw, \ w(0) = w_0; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Man konstruerar en följd av approximativa lösningar

$$\begin{aligned}
&W(0) = w_0, \\
&W(x_i) = W(x_{i-1}) + h_i A W(x_{i-1}) = (I + h_i A) W(x_{i-1}).
\end{aligned}$$

2. Man visar att denna är en Cauchy-följd och därför konvergerar $W(x) \to w(x)$ då $h \to 0$.

3. Man visar att $w(x)$ uppfyller begynnelsevärdesproblemet. Första komponenten $w_1(x)$ kallas $\sin(x)$ och

$$w(x) = \begin{bmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{bmatrix}.$$

4. Man visar att lösningen till begynnelsevärdesproblemet är unik, så att $w(x)$ är oberoende av valet av konstruktion.

(b) Se boken.

(c) Man skriver en m-fil kallad `funk.m`:

```
function yprime=funk(t,x)
yprime=[0 1; 1 0]*x;
```

sedan exekverar man matlabkommandot

```
>> [t,x]=my_ode('funk',[0;10],[0;1])
```

(d) Funktionen $y = \sin(x)$ är strängt växande på intervallet $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ med värdemängden $-1 \leq y \leq 1$. Den har därför en invers funktion $x = \arcsin(y)$ med definitionsmängden $-1 \leq y \leq 1$ och värdemängden $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$.

/stig