Matematik Chalmers

TMV035 + TMA196 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B, 2003–04–17 e V

Telefon: Georgios Foufas 0740 459022 (Stig Larsson 0733 409 006)
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Uppgifterna 1–10 (totalt 20 poäng) är korta frågor på det grundläggande materialet och du behöver endast ge kortfattade lösningar och svar. För godkänt krävs minst 16 poäng från denna avdelning.

På uppgifterna 11–13 (totalt 30 poäng) skall du ge fullständiga lösningar. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Rättningsprotokollet anslås på kursens hemsida och i Matematiskt Centrum senast 30 april.

1. Beräkna integralen $\int_1^x y\log(y)\,dy$.

2. Beräkna integralen $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$.

3. Vad menas med att en funktion är "udda"? Ge exempel. Visa att $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ om f är en udda funktion.

4. Beräkna integralen $\int_3^t \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$. För vilka t är den definierad?

5. Ange Taylors polynom av grad 6 för funktionen $\exp(-x)$ i punkten $\bar{x}=0$.

6. Programmet `my_ode.m` är skrivet enligt följande specifikation:

```
function [t,U]=my_ode(f,int,ua,h)
% my_ode - solves initial value problem for general system of
%          ordinary differential equations u'=f(t,u), a<t<b; u(a)=ua.
%   Syntax:
%           [t,U]=my_ode(f,int,ua,h)
%   Arguments:
%           f   - string containing the name of a function file
%           int - 1x2 matrix specifying a time interval int=[a,b]
%           ua  - dx1 matrix specifying an initial value
%           h   - positive number, the stepsize
%   Returns:
%           t - nx1 matrix containg the time points with t(1)=a
%           U - nxd matrix containing the approximate solution
```

Hitta på ett enkelt exempel som kan användas för att testa programmet. Ange de m-filer och MATLAB-kommandon som man behöver skriva. Ange en lösningsformel och skissa grafen till lösningen.

7. Lös begynnelsevärdesproblemet (b är en konstant) $\begin{cases} u'(t)+3u(t)=b, \\ u(0)=u_0. \end{cases}$

8. Skissa grafen till lösningen till uppgift 7 för $b=0$ och $b=5$ och diverse värden på u_0.

Vänd!

9. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Vad menas med värderummet $R(A)$ till A?

(b) Lös ekvationerna $Ax = b$ och $Ax = c$.

(c) Tillhör b och c värderummet $R(A)$?

(d) Ange en bas till $R(A)$ och bestäm värderummets dimension. Bestäm matrisens rang (på engelska "rank").

12. (a) Volterra-Lotkas ekvationer för populationsdynamik är:

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= au_1(t) - bu_1(t)u_2(t) \\ u_2'(t) &= -cu_2(t) + du_1(t)u_2(t) \end{aligned}$$

Här är koefficienterna a, b, c, d positiva tal. Vilken av variablerna u_1, u_2 representerar antalet rävar respektive antalet kaniner? Motivera.

(b) Beskriv hur man löser dessa ekvationer med de MATLAB-program som du skrivit under kursen.

(c) Ekvationerna kan skrivas på formen $u' = f(u)$. Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet $f(u) = 0$.

(d) Beräkna Jacobi-matrisen $f'(u)$.

(d) Välj lämpliga numeriska värden på koefficienterna a, b, c, d. Genomför ett steg av Newtons metod för ekvationssystemet $f(u) = 0$ med en lämpligt vald startvektor.

13. (a) Skriv ned det begynnelsevärdesprobem som vi använder för att definiera exponentialfunktionen $\exp(x)$.

(b) Skriv ned den algoritm som vi använder för att kunstruera exponentialfunktionen.

(c) Använd definitionen i (a) för att visa att logaritmen är exponentialfunktionens invers.

(d) Hur definierar vi funktionen a^x? För vilka a kan vi göra detta?

/stig