TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B, 2003–08–26. Lösningar.

---

1. $\frac{1}{2}\arctan(2t)$

2. $u(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+4y^2}\,dy = 1 + \frac{1}{2}\arctan(2x)$

3. Se boken.

4. $-2\cos(2) + \sin(2)$

5. $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$

6.

$$u'(x) = 1/x; \quad u(1) = 0.$$

med lösning $u(x) = \log(x)$.

7. (b) $u(t) = u_0 e^{-3t} + \int_0^t e^{-3(t-s)} b\,ds = u_0 e^{-3t} + \frac{b}{3}(1 - e^{-3t}) = (u_0 - \frac{b}{3})e^{-3t} + \frac{b}{3}$

8. —

9.

$$u'(x) = u(x); \quad u(0) = 1.$$

10.

$$u''(x) = -u(x); \quad u(0) = 1,\ u'(0) = 0.$$

---

11. (a) Vektorerna a, b, c är linjärt oberoende om likheten $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$ är uppfylld endast om skalärerna $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

(b) Ekvationen $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$ blir på matrisform

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Gauss eliminationsmetod leder till det ekvivalenta systemet

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 4 & 2 \\ 0 & \mathbf{-5} & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Lösningen blir

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}t \\ -\frac{3}{5}t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

där t är ett godtyckligt tal. Talen α, β, γ behöver alltså inte vara 0 och vektorerna a, b, c är alltså linjärt beroende.

(c) Med $t = 1$ får vi $\frac{2}{5}a - \frac{3}{5}b + c = 0$, dvs $c = -\frac{2}{5}a + \frac{3}{5}b$.

(d) Räkningarna i (b) visar att nollrummet är mängden av alla vektorer av formen

$$t \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vektorn $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$ bildar en bas för nollrummet.

12. (a) Sätt $w_1 = u$, $w_2 = u'$, så fås

$$\begin{aligned} w_1' &= u' = w_2 \\ w_2' &= u'' = u^3 - u - (u')^2 = w_1^3 - w_1 - w_2^2 \end{aligned}$$

vilket är det önskade systemet

$$\begin{aligned} w' &= f(w), \\ w(0) &= w_0, \end{aligned} \qquad \text{med } f(w) = \begin{bmatrix} w_2 \\ w_1^3 - w_1 - w_2^2 \end{bmatrix}, \quad w_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}.$$

(b) De stationära lösningarna ges av $f(w) = 0$, dvs

$$\begin{aligned} w_2 &= 0 \\ w_1^3 - w_1 - w_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

med lösningarna $w_2 = 0$, $w_1 = 0, \pm 1$. Dvs vi har tre stationära punkter $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $w = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(c) Jacobi-matrisen är

$$f'(w) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3w_1^2 - 1 & -2w_2 \end{bmatrix}, \quad f'(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Linjäriseringen av f i punkten $\bar{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ blir

$$\tilde{f}(w) = f(\bar{w}) + f'(\bar{w})(w - \bar{w}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 - 1 \\ w_2 - 1 \end{bmatrix}.$$

(d) Första steget av Newtons metod:

$$\begin{aligned} &A = f'(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad b = -f(1,1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &Ah = b, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &h = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix} \\ &w^{(1)} = w^{(0)} + h = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

13. (a)

$$u(t) = \frac{u_0}{\sqrt{1 + 2ktu_0^2}}, \quad t_{1/2} = \frac{3}{2ku_0^2}$$

.

`/stig`