Matematik Chalmers

Tentamen i TMA740B Analys i en variabel Kf Kb, del B, 1999–12–18, f HC

Telefon: Stig Larsson 070 655 3452, Ola Helenius 0740–459022
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 10 poäng, totalt 50 poäng.

Skriv väl; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Rättningsprotokollet anslås på kursens hemsida (förhoppningsvis) före jul.

1. (a) Beräkna

$$\int_0^x t\cos(5t)\,dt.$$

(b) Beräkna

$$\int_0^x \big(1+\sin^2(t)\big)\cos(t)\,dt.$$

(c) Låt

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+\sin^4(t)}.$$

Bestäm en Lipschitzkonstant för f.

2. (a) Skriv ned Taylors formel av ordning 2 i punkten 0 för funktionen $f(x) = \log(1+x)$. Illustrera med en figur på intervallet $-1 < x < 1$. (Med ordning 2 menar jag att Taylorpolynomet är av grad högst 2. Resttermen betecknas $R_2(x)$.)

(b) Bestäm en konstant C sådan att olikheten $|R_2(x)| \le C|x|^3$ gäller på intervallet $0 < x < 1$. Och på intervallet $-1 < x < 1$?

(c) Använd detta för att beräkna en approximation till $\log(1.1)$. Ge en uppskattning av felet.

3. (a) Lös (analytiskt) begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} &u'' - 2u' + 17u = 0, \quad t > 0,\\ &u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1. \end{aligned}$$

(b) Antag att $u_0 = u_1$. Rita grafen till u. Visa att $\max\limits_{0\le t\le T} |u(t)| \le e^T|u_0|$.

(c) Beskriv en metod för numerisk lösning av begynnelsevärdesproblemet.

(d) Beskriv hur man går tillväga för att lösa begynnelsevärdesproblemet med hjälp av det matlab-program som du själv skrivit.

4. Formulera integralkalkylens fundamentalsats. Ange de olika stegen i beviset (utan detaljer).

5. (a) Låt $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definieras av

$$f(x) = \begin{bmatrix} -2(x_1-1) + x_2e^{x_1} \\ -2x_2 - x_2e^{x_1} \end{bmatrix}.$$

Lös (analytiskt) ekvationen $f(x) = 0$.

(b) Beräkna $f'(x)$.

(c) Genomför första steget i Newtons metod för ekvationen $f(x) = 0$ med startvektor $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(d) Vilken sats garanterar att ekvationen $f(x) = y$ har en unik lösning för alla y nära 0? Kontrollera att satsens förutsättningar är uppfyllda. Skriv ned den iteration som används i beviset av satsen.

/stig