96. Determinant. Invers matris (Ch 42.23-34)

Kvadratisk matris, typ $n \times n$ (lika många rader som kolonner)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = [a_1, \dots, a_n]$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ a_1 & a_n \end{array}$$

Kom ihåg "volymsfunktionen" i $\mathbf{R}^2$ och $\mathbf{R}^3$.

I $\mathbf{R}^2$ kryssprodukten:

$$V(a_1, a_2) = a_1 \times a_2 = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Egenskaper:

$V(a_1, a_2) = \pm$ arean av parallellogram

$V(e_1, e_2) = 1 =$ arean av enhetskvadraten

$V(a_2, a_1) = -V(a_1, a_2)$

$$\begin{cases} V(\alpha a_1 + \beta b_1, a_2) = \alpha V(a_1, a_2) + \beta V(b_1, a_2) \\ V(a_1, \alpha a_2 + \beta b_2) = \alpha V(a_1, a_2) + \beta V(a_1, b_2) \end{cases} \quad \text{bilinjär (linjär i båda variablerna)}$$

I $\mathbf{R}^3$ trippelprodukten:

$$V(a_1, a_2, a_3) = a_1 \cdot (a_2 \times a_3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Egenskaper:

$V(a_1, a_2, a_3) = \pm$ volymen av parallellepiped

$$V(e_1, e_2, e_3) = 1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \text{volymen av enhetskuben}$$

$V(a_1, a_2, a_3) = -V(a_2, a_1, a_3)$, osv, alternerande

trilinjär (linjär i alla tre variablerna)

Man kan definiera en volymsfunktion i n variabler som har samma egenskaper, dvs alternerande, multilinjär med $V(e_1, \ldots, e_n) = 1$, se (42.51):

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{\pi} \pm a_{\pi(1)1} \cdots a_{\pi(n)n}$$

Vi bryr oss inte om detaljerna i denna definition. Vi noterar bara att V är en summa av produkter av n matriselement, precis ett från varje rad och varje kolumn, med tecknet plus eller minus varannan gång enligt ett visst schema.

I $\mathbf{R}^2$ och $\mathbf{R}^3$ har V denna form, eller hur?

Vi definierar även *determinanten* av A:

$$\det(A) = V(a_1, \ldots, a_n)$$

Den skrivs också

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{determinantstreck} \\ \swarrow \end{array}$$

I Matlab/Octave: `>> D=det(A)`

$$\begin{array}{lcccl} a_1 & \longrightarrow & & & \\ a_2 & \longrightarrow & \boxed{\begin{array}{c} V \\ \det \end{array}} & \longrightarrow & \begin{array}{c} V(a_1, \ldots, a_n) = \det(A) \\ \text{(ett tal)} \end{array} \\ & \vdots & & & \\ a_n & \longrightarrow & & & \end{array}$$

(n st vektorer)

$$V : \underbrace{\mathbf{R}^n \times \ldots \times \mathbf{R}^n}_{n \text{ st}} \to \mathbf{R}$$

Egenskaper (de flesta utan bevis)

(A) $\det(I) = V(e_1, \ldots, e_n) = 1$

(B) <u>alternerande</u>

$$V(a_1, \ldots, \quad a_j, \ldots, a_k, \quad \ldots, a_n) = (\text{två byter plats}) = -V(a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_j, \ldots, a_n)$$

$$\longleftarrow \; \longrightarrow$$

Konsekvens: två lika $a_j = a_k \Rightarrow V = -V \Rightarrow V = 0$

(C) multilinjär (linjär i varje argument)

$$V(a_1, \ldots, \alpha a_j + \beta b_j, \ldots, a_n) = \alpha V(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n) + \beta V(a_1, \ldots, b_j, \ldots, a_n)$$

(D) transponering

$$\det(A^T) = \det(A)$$

(E) produkt (med $A, B,\ n \times n$)

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

(F) utveckling (efter rad 1)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n4} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} - \ldots$$

mindre determinanter, typ $(n-1) \times (n-1)$, som sin tur kan utvecklas.
Kan utveckla efter godtycklig rad eller kolonn.

(G) Gauss-elimination
Kolonnoperationer av tre slag:

(1) 2 kolonner byter plats $\Rightarrow$ determinanten byter tecken enligt (B).
(2) multiplicera kolonn med konstant
$V(a_1, \ldots, \alpha a_j, \ldots, a_n) = \alpha V(a_1, \ldots, a_j, \ldots a_n)$
bryter ut konstanten ur determinanten enligt (C).
(3) addera multipel av en kolonn till en annan kolonn

$$\begin{aligned} V(a_1, \ldots, a_j + \alpha a_k, \ldots, a_k, \ldots, a_n) &= \{\text{enligt (C)}\} \\ &= V(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_k, \ldots, a_n) + \alpha \underbrace{V(a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_k, \ldots, a_n)}_{= 0 \text{ enligt (B), två lika}} \end{aligned}$$

Determinanten ändras ej.
Samma regler gäller för *radoperationer*, ty $\det(A^T) = \det(A)$.

(H) triangulär matris

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \{\text{utveckla efter kolonn nr } 1\}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} - \underbrace{a_{21}}_{=0} \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \underbrace{a_{31}}_{=0} \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \dots$$

$$= a_{11} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{oxå triangulär}} = a_{11}a_{22} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{33} & \dots & \dots & a_{3n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{oxå triangulär}} = \dots = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

Determinanten av triangulär matris är lika med produkten av diagonalelementen. Enkelt!!

exempel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \boxed{-4} & \boxed{-1} \\ \swarrow & \\ & \swarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{bryt ut } -3 \text{ ur rad } 2 \\ \text{bryt ut } -1 \text{ ur rad } 3 \end{matrix} \right\} = (-3)(-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \boxed{-1} \\ \swarrow \end{matrix}$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \{\text{triangulär}\} = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -3$$

Kan också fortsätta till *radreducerad* form:

$$3\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&-1\end{vmatrix} = \{\text{bryt ut } -1 \text{ ur rad } 3\} = -3\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{vmatrix} \begin{matrix}\nwarrow\\ \boxed{-2}\\ \end{matrix}$$

$$= -3\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&1\end{vmatrix} \begin{matrix} & \nwarrow\\ \nwarrow & \\ \boxed{-2} & \boxed{1}\end{matrix} = -3\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix} = -3\det(I) = -3.$$

exempel: $\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\1&1&1\end{vmatrix} = \{\text{Gauss-elim.}\} \begin{vmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&0\end{vmatrix} = \{\text{triangulär}\} = 1\cdot(-3)\cdot 0 = 0$

Radreducerad form:

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&0\end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&0\end{vmatrix} \begin{matrix}\nwarrow\\ \boxed{-2}\\ \end{matrix} = -3\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{vmatrix} = -3\cdot 1\cdot 1\cdot 0 = 0$$

I Matlab/Octave: `>> Ahat=rref(A)`

exempel: (samma som ovan)

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\1&1&1\end{vmatrix} = \{\text{utveckla efter rad 1}\}$$

$$= 1\begin{vmatrix}5&6\\1&1\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}4&6\\1&1\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}4&5\\1&1\end{vmatrix} = (5-6) - 2(4-6) + 3(4-5)$$

$$= -1 + 4 - 3 = 0$$

Varning!! Sarrus regel (om du vet vad det är) kan endast användas för determinant av typ 2×2 och 3×3. Ingår därför ej i denna kurs!

Gauss elimination $\hat{A} = \mathrm{rref}(A)$ ger antingen fall 1 eller fall 2:

fall 1: $\hat{A} = \begin{bmatrix}1&0&\dots&0\\0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\dots&0&1\end{bmatrix} = I$ (enhetsmatris)

(alla trappsteg i trappstegsmatrisen har bredden ett)

fall 2: $\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(något trappsteg är bredare än ett, vi får ettor början och nollor i slutet av diagonalen)

Av trappstegsformen ser vi att:

fall 1:

(a) $\det(A) = c \underbrace{\det(\hat{A})}_{=1} = c \neq 0$ (talet c är produkten av de konstanter vi brutit ut, $\hat{A} = I$)

(b) kolonnerna $a_1, \ldots, a_n$ är *linjärt oberoende*, dvs $a_1, \ldots, a_n$ är en bas för $\mathbf{R}^n$, dvs $R(A) = \mathbf{R}^n$, dvs lösning till $Ax = y$ *existerar* för varje $y \in \mathbf{R}^n$.

(c) $Ax = 0$ har endast trivial lösning $x = 0$, dvs $N(A) = \{0\}$, dvs lösningen till $Ax = y$ är *unik*.

fall 2:

(a) $\det(A) = c \underbrace{\det(\hat{A})}_{=0} = 0$

(b) kolonnerna är *linjärt beroende*, dvs $R(A) \neq \mathbf{R}^n$, dvs $Ax = y$ är *olösbar* för vissa y, nämligen $y \notin R(A)$.

(c) $Ax = 0$ har icke-trivial lösning $x \neq 0$, dvs $N(A) \neq \{0\}$, dvs lösningen till $Ax = y$ är *ej unik*.

Villkoret $\det(A) \neq 0$ skiljer mellan fall 1) och fall 2).

fall 1: $\det(A) \neq 0$, A kallas *icke-singulär*

fall 2: $\det(A) = 0$, A kallas *singulär*.

Invers matris.

I fall 1 kan vi konstruera en matris X, typ $n \times n$, sådan att

$$XA = AX = I. \tag{1}$$

X kallas *inversen* till A och tecknas A^{-1}. I Matlab/Octave: `>> X=inv(A)`.

Övning: Visa att inversen är unik!

Vi konstruerar nu X. Vi börjar med att lösa den första ekvationen i (1), dvs

$$AX = I$$

Kolonnvis: $I = [e_1, \ldots, e_n]$, $X = [x_1, \ldots, x_n]$, ekvationen för kolonn nr k blir $Ax_k = e_k$, dvs

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \text{nr } k \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Gauss-elimination ger $\mathrm{rref}([A, e_k]) = [I, b_k]$, ty $\hat{A} = I$ i fall 1, där b_k är någon vektor, så att det ekvivalenta systemet $\hat{A}x_k = b_k$ blir $Ix_k = b_k$, dvs $x_k = b_k$.

Det är praktiskt att lösa alla på en gång: $AX = I$, $\quad \mathrm{rref}([A, I]) = [I, B]$, $\quad$ så att $\hat{A}X = B$ blir $IX = B$, dvs $X = B$.

Nu löser vi den andra ekvationen i (1), dvs $YA = I$.

Ekvationen transponeras:

$$\begin{gathered} A^T Y^T = I \quad (\text{ty } (AB)^T = B^T A^T,\ I^T = I) \\ \mathrm{rref}([A^T, I]) = [\underbrace{I}_{\text{fall 1}}, C] \end{gathered}$$

så att $Y^T = C$ och $Y = C^T$.

(Obs: A^T tillhör också fall 1, ty $\det(A^T) = \det(A) \neq 0$.)

Vi har nu funnit unika matriser X, Y sådana att

$$AX = I, \quad YA = I.$$

Enkelt att visa att $X = Y$:

$$\underbrace{YA}_{=I} X = \underbrace{YI}_{=Y}$$

Alltså: $XA = AX = I$, dvs $X = A^{-1}$.

Invers matris kan oxå beräknas med Cramers regel: se AMBS Ch 42.33.

Sammanfattning.

Antag att A, $n \times n$, är en kvadratisk matris. Följande villkor är ekvivalenta:

(a) $\det(A) \neq 0$

(b) $R(A) = \mathbf{R}^n$ (existens)

(c) $N(A) = \{0\}$ (entydighet)

(d) $Ax = y$ har *unik lösning* för varje $y \in \mathbf{R}^n$

(e) A har en *invers* matris A^{-1}.

(f) A's kolonner $a_1, \dots, a_n$ är *linjärt oberoende.*

Den unika lösningen till $Ax = y$ ges då av formeln $x = A^{-1}y$. Detta kan också formuleras som att funktionen $y = Ax$ är inverterbar med inversen $x = A^{-1}y$.

Obs: för $n \times n$ systemet $Ax = y$ betyder ekvivalensen (b) $\Leftrightarrow$ (c) att det räcker att kolla *entydighet* (c), så får man *lösbarhet* (b) på köpet. Och vice versa.

Detta är mycket användbart: det är ofta lätt att visa entydighet.

I praktiken beräknar vi sällan $\det(A)$ och A^{-1}. Till exempel, istället för att använda formeln $x = A^{-1}y$ är det mera effektivt att lösa $Ax = y$ med Gauss-elimination. Men $\det(A)$ och A^{-1} spelar viktiga roller i matristeorin. Determinanten (= volymsfunktionen) används också vid variabelsubstitution i integraler i flera variabler, som vi ska se i ALA-C.

exempel: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Vi har sett att $\det(A) = -3 \neq 0$. Beräkna A^{-1}.

Vi löser $AX = I$ med Gauss-elimination

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \boxed{-4}\ \boxed{-1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \boxed{-\tfrac{1}{3}} \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \boxed{-2}\ \boxed{1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right] \quad \boxed{-2}\ \boxed{1} \qquad [\hat{A}|X] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right]$$

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

Övningar.

Beräkna $\det(A)$ och, om A är icke-singulär, beräkna även A^{-1} och den unika lösningen till $Ax = y$ med formeln $x = A^{-1}y$.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 71 & 32 & 93 & 33 \\ 0 & 43 & 57 & 58 \\ 0 & 0 & 0 & 66 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Svar. Använd Matlab/Octave för att kolla dina räkningar.

`2004-01-18 /stig`