Lösningar till TMA195 020118

.

2. Triangeln, som vi kan kalla T utgör ett slutet och begränsat område och f är Lipschitzkontinuerlig på T så f antar största och minsta värde på T. Dessa återfinns i stationära punkter, $\nabla f = 0$, i T eller i punkter på randen till T.

Stationära punkter i T:

$$f'_{x_1} = 3(x_1^2 - x_2) = 0; \quad f'_{x_2} = 3(x_2^2 - x_1) = 0,$$

har lösningen $(x_1, x_2) = (1, 1)$ i T. Vidare har vi $f(1, 1) = -1$.

Randen: Vi delar upp randen i tre delar:
i) $0 \leq x_1 \leq 4$, $x_2 = 0$.

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, 0) \text{ som vxer strikt.}$$

Således är minsta värdet $f(0, 0) = 0$ och största värdet $f(4, 0) = 64$.

ii) $0 \leq x_1 \leq 4$, $x_2 = 2x_1$.

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, 2x_1) = 9x_1^3 - 6x_1^2. \; f'_{x_1} = 27x_1^2 - 12x_1 = 0$$

har lösning $(x_1, x_2) = (0, 0)$ och $(x_1, x_2) = (4/9, 8/9)$. Ny kandidat: $f(4/9, 8/9) = -32/81$.

iii) $x_1 = 4$, $0 \leq x_2 \leq 8$.

$$f(x_1, x_2) = f(4, x_2) = 64 - 12x_2 + x_2^3. \; f'_{x_2} = 3x_2^2 - 12 = 0$$

har lösning $(x_1, x_2) = (4, 2)$ i T. Ny kandidat: $f(4, 2) = 48$. Vi undersöker slutligen hörnet $(4, 8)$. $f(4, 8) = 480$.

Slutsats: Största värde: 480 i $(4, 8)$ och minsta värde: -1 i $(1, 1)$.

3. Vi noterar att Gauss' sats gäller och att dessutom div $u = 0$. Låt nu Ω vara området $\{(x_1, x_2) : \; x_1^2 + x_2^2 \leq 1, \; x_1, \; x_2 \geq 0\}$. Slut sedan in Ω med γ och linjestyckena $\gamma_1 : 0 \leq x_1 \leq 1$, $x_2 = 0$ och $\gamma_2 : 0 \leq x_2 \leq 1$, $x_1 = 0$. Gauss' sats ger

$$\int_\gamma u \cdot n ds = \int_\Omega \text{div} u dx - \int_{\gamma_1} u \cdot n ds - \int_{\gamma_2} u \cdot n ds.$$

Insättning ger

$$\int_\gamma u \cdot n ds = 0 - \int_0^1 (0,0)\cdot(0,-1)dx_1 - \int_0^1 (0, -\log(1+x_2^2)\cdot(-1,0)dx_2 = 0.$$

4. Både divergensen och rotationen blir noll.

5. Vi noterar att vektorfältet F ej är definierat i origo varvid Green's formel ej kan användas på F. Till vår räddning gäller dock att på kurvan γ så är $\|x\|^4 = 81$, dvs konstant. Detta ger

$$I = \int_\gamma F \cdot ds = \frac{1}{81} \int_\gamma (e^{x_1^2} - x_2^3, e^{x_2^2} - x_1^3) \cdot ds.$$

På den andra integralen gäller Green's formel och vi får (Ω är området innanför γ)

$$I = \frac{1}{81} \int_\Omega 3(x_1^2 + x_2^2)dx = 3\pi/2.$$