Matematik Chalmers

Tentamen i TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del A, 2004–10–20 f V

Telefon: Erik Svensson 0739 779268
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 10 poäng, totalt 50 poäng. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Rättningsprotokollet anslås på kursens hemsida och i Matematiskt Centrum.

---

1. Innehållet i filerna `bisect.m` och `f.m` finns på baksidan av detta blad.

(a) Redogör för vad som utförs efter följande kommandorad i MATLAB: (6 p)

```
>> intervall=[0,2]; tolerans=0.5; y=bisect(intervall, tolerans)
```

Gå igenom programmen steg för steg och redovisa allt, varje villkor, varje siffra som beräknas.

(b) Samma uppgift för kommandoraden (2 p)

```
>> intervall=[0,2]; tolerans=0.5; y=bisect(tolerans, intervall)
```

(c) Samma uppgift för kommandoraden (2 p)

```
>> help bisect
```

2. (a) Lös ekvationssystemet $Ax = b$ med (6 p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

(b) Låt a_1, a_2, a_3 beteckna kolonnerna i matrisen A. Utan att lösa systemet $Ax = b$ ge ett villkor på a_1, a_2, a_3 som garanterar att systemet har unik lösning och avgör om detta villkor är uppfyllt i detta fall. (4 p)

3. (a) Definiera begreppet deriverbarhet för en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i en punkt $\bar{x}$. (3 p)

(b) Visa produktregeln för derivata med hjälp av definitionen. (4 p)

(c) För heltal n gäller att $D(x^n) = nx^{n-1}$. Visa att det även gäller att $D(x^r) = rx^{r-1}$ för rationellt tal r. (3 p)

4. Betrakta funktionen

$$g(x) = \frac{1}{4 - x^2}.$$

(a) Visa (direkt med hjälp av definitionen) att g är Lipschitzkontinuerlig på intervallet $[-1, 1]$ och bestäm en Lipschitzkonstant för g på detta intervall. (6 p)

(b) Är g Lipschitzkontinuerlig på intervallet $(0, 2)$? Motivera Ditt svar. (4 p)

5. Betrakta systemet

$$\begin{cases} x_2(x_1^3 + 1) = 3, \\ x_2(x_1 - x_2) = -1. \end{cases}$$

Utför ett steg av Newtons metod på detta system med startvärde $\bar{x} = (1, 2)$. (10 p)

Vänd!

Filen `bisect.m` innehåller:

```
function x = bisect(int, tol)
% bisect - bisection algorithm for the scalar equation f(x) = 0
%   Syntax:
%           x = bisect(int, tol)
%   Arguments:
%           int - 2-element vector specifying an interval int = [a, b]
%           tol - a tolerance
%   Returns:
%           x - an approximate solution in the interval int = [a, b]
%---------------------------------------------------------------------
a = int(1);
b = int(2);

fa = f(a);
fb = f(b);

while (b - a > tol)
  x = (a+b)/2;
  fx = f(x);

  if (fa * fx < 0)
    b = x; fb = fx;
  else
    a = x; fa = fx;
  end

end

x = (a + b) / 2;
```

Filen `f.m` innehåller:

```
function y=f(x)
y=x^2-2;
```

/stig

TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del A, 2004–10–20 f V. Lösningar.

---

1. (a)
Vi kommer in i programmet bisect.
int=[0,2], tol=0.5
a=0, b=2,
Vi kommer in i programmet f.
x=0, y = -2
Programmet f slutar.
fa=-2, på samma vis beräknas fb=2
while
b-a=2, villkor: $2 > 0.5$ sant
x=1, i programmet f beräknas fx=-1,
if
fa*fx=2, villkor: $2 < 0$ falskt, a=1, fa=-1
end if
end while
while
b-a=1, villkor: $1 > 0.5$ sant
x=1.5, fx=0.25,
if
fa*fx=-0.25, villkor: $-0.25 < 0$ sant, b=1.5, fb=0.25
end if
end while
while
b-a=0.5, villkor: $0.5 > 0.5$ falskt
while loopen slutar
x=1.25
Programmet bisect slutar.
I kommandofönstret: y=1.25
(b) bisect stoppar genast med ett felmeddelande om att int(2) inte är definierad.
(c) I kommandofönstret ser vi

```
bisect - bisection algorithm for the scalar equation f(x) = 0
  Syntax:
          x = bisect(int, tol)
  Arguments:
          int - 2-element vector specifying an interval int = [a, b]
          tol - a tolerance
  Returns:
          x - an approximate solution in the interval int = [a, b]
```

2. (a) Med hjälp av Gauss eliminationsmetod beräknar vi en unik lösning

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Villkoret är $V(a_1, a_2, a_3) \neq 0$. Här får vi

$$V(a_1, a_2, a_3) = |a_1 \cdot a_2 \times a_3| = |(1, 2, 3) \cdot (2, 0, -1)| = 1 \neq 0.$$

3. (a) Se boken kap 23.4. (b) Se boken kap 24.3. (c) Se boken kap 24.10.

4. (a)

$$\begin{aligned} |g(x_1) - g(x_2)| &= \Big| \frac{1}{4 - x_1^2} - \frac{1}{4 - x_2^2} \Big| = \Big| \frac{(4 - x_2^2) - (4 - x_1^2)}{(4 - x_1^2)(4 - x_2^2)} \Big| = \Big| \frac{x_1^2 - x_2^2}{(4 - x_1^2)(4 - x_2^2)} \Big| \\ &= \Big| \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{(4 - x_1^2)(4 - x_2^2)} \Big| = \frac{|x_1 + x_2|}{|4 - x_1^2|\,|4 - x_2^2|} |x_1 - x_2|. \end{aligned}$$

Vi får en uppskattning av kvoten $\dfrac{|x_1 + x_2|}{|4 - x_1^2|\,|4 - x_2^2|}$ för $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ genom att maximera täljaren och minimera nämnaren var för sig:

$$\begin{aligned} &|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \leq 1 + 1 = 2, \\ &|4 - x_1^2| = 4 - x_1^2 \geq 4 - 1 = 3, \quad |4 - x_2^2| = 4 - x_2^2 \geq 4 - 1 = 3, \\ &|4 - x_1^2|\,|4 - x_2^2| \geq 9, \\ &\frac{|x_1 + x_2|}{|4 - x_1^2|\,|4 - x_2^2|} \leq \frac{2}{9} \quad \forall x_1, x_2 \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Alltså är g Lipschitzkontinuerlig med Lipschitzkonstant $L_g = 2/9$ på intervallet $[-1, 1]$.

(b) På intervallet $(0, 2)$ kan nämnaren bli hur liten som helst och kvoten $\dfrac{|x_1 + x_2|}{|4 - x_1^2|\,|4 - x_2^2|}$ bli hur stor som helst och g är därför inte Lipschitzkontinuerlig på detta intervall.

5. Vi definierar funktionen

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2(x_1^3 + 1) - 3 \\ x_2(x_1 - x_2) + 1 \end{bmatrix}$$

så att ekvationssystemet kan skrivas $f(x) = 0$. Jacobimatrisen är

$$Df(x) = \begin{bmatrix} 3x_1^2 x_2 & x_1^3 + 1 \\ x_2 & x_1 - 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Första steget av Newtons metod blir nu som följer.
Evaluera Jacobianen och residualen:

$$A = Df(1, 2) = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad b = -f(1, 2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lös det linjäriserade ekvationssystemet med Gauss eliminationsmetod:

$$Ah = b, \quad \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} 6h_1 + 2h_2 = -1, \\ 2h_1 - 3h_2 = 1, \end{cases} \quad h = \begin{bmatrix} -\frac{1}{22} \\ -\frac{4}{11} \end{bmatrix}.$$

Uppdatera x:

$$x = \bar{x} + h = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{22} \\ -\frac{4}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{21}{22} \\ \frac{18}{11} \end{bmatrix}.$$

`/stig`