

ALA-a 2005

RÄKNEÖVNING — VECKA 1

David Heintz, 19 september 2005

Innehåll

1	Kapitel 5	3
1.1	Uppgift 5.12	3
1.2	Uppgift 5.15	4
1.3	Uppgift 5.16	4
2	Kapitel 7	6
2.1	Uppgift 7.8	6
2.2	Uppgift 7.10	6
3	Kapitel 9	8
3.1	Uppgift 9.2	8

1 Kapitel 5

1.1 Uppgift 5.12

Factor the following integers into a product of prime numbers.

a) 60

Man skulle kunna säga att naturliga tal är mer eller mindre delbara, varför det är på sin plats med en definition.

Definition 1.1 (PRIMTAL). Låt $p > 1, p \in \mathbb{N}$. Nu sägs p vara ett primtal såvida det saknar andra positiva delare än 1 och p . Annars är p sammansatt (byggs upp av primtalsfaktorer).

Exempel. De första primtalen är 2, 3, 5, 7, 11, 13, ..., medan det hittills största kända primtalet är $2^{25904951} - 1$. Euklides visade att det finns oändligt många primtal (kraftfulla datorer hittar med tiden nya och större).

Här får vi

$$60 = 2 \cdot 30 = 2 \cdot 2 \cdot 15 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$$

□

b) 96

Efter faktorisering ges

$$96 = 2 \cdot 48 = 2 \cdot 2 \cdot 24 = 2^2 \cdot 2 \cdot 12 = 2^3 \cdot 2 \cdot 6 = 2^4 \cdot 2 \cdot 3 = 2^5 \cdot 3.$$

□

c) 112

Vi får

$$112 = 2 \cdot 56 = 2 \cdot 2 \cdot 28 = 2^2 \cdot 2 \cdot 14 = 2^3 \cdot 2 \cdot 7 = 2^4 \cdot 7.$$

□

d) 129

Tal vars siffersumma är delbar med 3 är själva delbara med 3 ($1 + 2 + 9 = 12, \frac{12}{3} = 4$):

$$129 = 3 \cdot 43.$$

En bra primtalsverktyg i MATLAB är den inbyggda funktionen `factor`. Skriv `help factor` i MATLAB-prompten för att få veta mer. □

1.2 Uppgift 5.15

Solve the inequalities.

b) $|14 - x| < 6$

Vi börjar med en definition.

Definition 1.2 (ABSOLUTBELOPP). Absolutbeloppet $|x|$ av ett reellt tal x är

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{om } x \geq 0, \\ -x, & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

Anmärkning. Absolutbeloppet $|\cdot|$ är en funktion som endast antar värden större än eller lika med noll. På tallinjen betyder $|x|$ avståndet från punkten x till origo. Mer allmänt tolkas $|x - y|$ som avståndet mellan punkterna x och y .

Definition 1.2 medför att vi delar in och löser uppgiften i två fall:

$$(i) \quad 14 - x > 0, \quad (ii) \quad 14 - x < 0.$$

I det första fallet antas vänsterledet (VL) vara positivt så att

$$|14 - x| < 6 \iff 14 - x < 6 \implies x > 8. \quad (1)$$

När VL i stället är negativt fås

$$|14 - x| < 6 \iff x - 14 < 6 \implies x < 20, \quad (2)$$

eftersom VL då — p.g.a. absolutbeloppet — byter tecken. Kombinerar vi (1) och (2) blir svaret $8 < x < 20$. $\square$

1.3 Uppgift 5.16

Verify that the following is true for arbitrary integers a , b and c .

d) $|a + b| \leq |a| + |b|$

Man kan visa olikheten genom att först konstatera att $a \leq |a|$ och $b \leq |b|$. Därmed måste även

$$a + b \leq |a| + |b|. \quad (3)$$

Sedan är givetvis $-a \leq |a|$ samt $-b \leq |b|$, så att

$$-a - b = -(a + b) \leq |a| + |b|. \quad (4)$$

Men ett av talen $a + b$ eller $-(a + b)$, dvs. VL i antingen (3) eller (4), är lika med $|a + b|$ (enligt Definition 1.2)! Alltså gäller $|a + b| \leq |a| + |b|$ och beviset är klart.

Anmärkning. Olikheten $|a + b| \leq |a| + |b|$ är mycket känd och kallas för *triangelolikheten* (TO). $\square$

h) $||a| - |b|| \leq |a - b|$

Vi tar till ett trick och skriver

$$a = a - b + b,$$

och utnyttjar sedan triangelolikheten

$$|a| = |(a - b) + b| \stackrel{\text{TO}}{\leq} |a - b| + |b| \implies |a| - |b| \leq |a - b|. \quad (5)$$

På samma sätt fås att $b = b - a + a$ och det följer

$$|b| = |(b - a) + a| \stackrel{\text{TO}}{\leq} |b - a| + |a| \stackrel{*}{=} |a - b| + |a| \implies -(|a| - |b|) \leq |a - b|. \quad (6)$$

Med andra ord kan vi nu — genom samma argumentation som i d) — säga att olikheten $||a| - |b|| \leq |a - b|$ gäller, ty endera av VL i (5) eller (6) är lika med $||a| - |b||$.

Notera att (*) följer av $|b - a| = |(-1)(a - b)| = \underbrace{|-1|}_{=1} |a - b| = |a - b|$ [se även deluppgift c)].

Anmärkning. Olikheten $||a| - |b|| \leq |a - b|$ brukar kallas för *omvända triangelolikheten*. $\square$

2 Kapitel 7

2.1 Uppgift 7.8

Compute the decimal expansions.

b) $2/13$

Detta görs via ett lämpligt räknescema för division, t.ex. *liggande stolen*. Svaret borde bli

$$\frac{2}{13} = 0.153846153846 \dots,$$

där vi särskilt noterar att decimalutvecklingen är periodisk. Enligt Sats 7.1 i AMBS är varje decimalexpansion av ett rationellt tal periodisk, och tvärtom, varje periodisk decimalutveckling motsvaras av ett rationellt tal. $\square$

2.2 Uppgift 7.10

Find rational numbers corresponding to the decimal expansions.

b) $0.881188118811\dots$

Vi inleder med att betrakta en summa s_n av formen

$$s_n = a + ax + ax^2 + \dots + ax^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} ax^k, \quad \forall a, x \in \mathbb{R}.$$

En sådan summa, där kvoten x mellan två på varandra följande tal alltid är densamma, kallas *geometrisk summa*. Enkel räkning ger

$$\begin{aligned} (1-x)s_n &= (1-x)(a + ax + ax^2 + \dots + ax^{n-1}) \\ &= (a + ax + ax^2 + \dots + ax^{n-1}) - (ax + ax^2 + ax^3 + \dots + ax^n) \\ &= a - ax^n, \end{aligned}$$

eftersom varje term i högerledet (HL), förutom den första och den sista, tar ut varandra i en s.k. *teleskopsumma*. Givet $x \neq 1$ (om $x = 1$ blir givetvis $s_n = an$) följer via division en bekväm lösningsformel

$$s_n = \frac{a(1-x^n)}{1-x} = \frac{(\text{första termen})(1 - \text{kvoten}^{\text{antalet termer}})}{1 - \text{kvoten}}.$$

Med $a = 1$ fås särskilt

$$s_n = \frac{1-x^n}{1-x}. \quad (7)$$

Notera att den givna decimalutvecklingen kan skrivas som en summa av rationella tal

$$0.881188118811\dots = \frac{8811}{10^4} + \frac{8811}{10^8} + \frac{8811}{10^{12}} + \dots + \frac{8811}{10^{4m}}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

(den första termen i HL motsvarar de första fyra decimalerna i utvecklingen, den andra de fyra nästkommande, osv.) eller, efter faktorisering,

$$0.881188118811\dots = \frac{8811}{10^4} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^8} + \dots + \frac{8811}{10^{4(m-1)}}\right)}_{=s_m}. \quad (8)$$

Genom (7) identifierar vi summan — en geometrisk sådan med $a = 1$ och $x = 10^{-4}$ — till att vara

$$s_m = \frac{1 - 10^{-4m}}{1 - 10^{-4}} = \frac{10^4}{9999}(1 - 10^{-4m}). \quad (9)$$

Med (9) insatt i (8) fås

$$0.881188118811\dots = \frac{8811}{9999}(1 - 10^{-4m}) = \frac{89}{101}(1 - 10^{-4m})$$

efter förkortning av bråket (med en faktor 99). Alltså måste

$$0.881188118811\dots - \frac{89}{101} = -\frac{89}{101 \cdot 10^{4m}},$$

dvs. att ju längre vi fortsätter decimalexpansionen, vilket är detsamma som att göra m större och större, desto mindre blir differensen mellan termerna i VL (ty kvoten i HL går samtidigt mot noll). Matematiskt skriver vi detta

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| 0.8811\dots 8811_m - \frac{89}{101} \right| = 0,$$

där notationen $0.8811\dots 8811_m$ motsvarar en trunkering av expansionen efter m decimaler (mer om s.k. gränsvärden kommer senare i kursen!) Det sökta rationella talet är med andra ord $89/101$. $\square$

3 Kapitel 9

3.1 Uppgift 9.2

For the function $f(x) = 4x - 2$ determine the range R_f given the domain D_f .

a) $D_f = (-2, 4]$

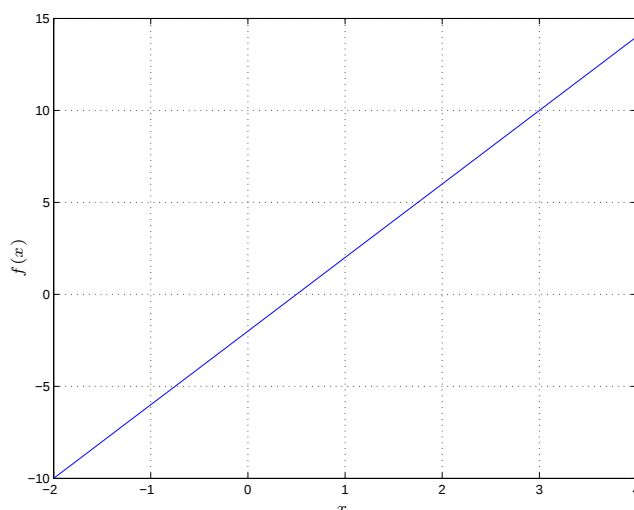
Eftersom f är en linjär funktion, vilket, om inte annat, inses av Figur 1, kommer dess minsta resp. största värde ligga i definitionsmängdens ändpunkter, dvs. -2 och 4 . Insättning ger att $f(-2) = 4(-2) - 2 = -10$ samt $f(4) = 4 \cdot 4 - 2 = 14$, så att värdemängden blir $R_f = (-10, 14]$.

Anmärkning. Möjligen borde vi bättre argumentera att f är en Lipschitzkontinuerlig funktion utan inre extrempunkter. Mer om det senare i kursen!

Anmärkning. Ett intervall I , med ändpunkter a och b , beskrivs som *öppet*, *halvöppet* eller *slutet*, beroende på om båda, den ena eller ingen av ändpunkterna tillhör intervallet. Vanliga beteckningar är

- $I = [a, b]$: alla reella tal x med $a \leq x \leq b$ (ÖPPET);
- $I = (a, b]$: alla reella tal x med $a < x \leq b$ (HALVÖPPET);
- $I = [a, b)$: alla reella tal x med $a \leq x < b$ (HALVÖPPET);
- $I = (a, b)$: alla reella tal x med $a < x < b$ (SLUTET).

I uppgiften var såväl D_f som R_f halvöppna intervall (eller halvöppna mängder).



Figur 1: $f(x) = 4x - 2$ är en linjär funktion.

□