

# ALA-a 2005

RÄKNEÖVNING — VECKA 2

*David Heintz, 19 september 2005*

---

## Innehåll

<b>1 Kapitel 10</b>	<b>3</b>
1.1 Uppgift 10.2 . . . . .	3
1.2 Uppgift 10.7 . . . . .	3
1.3 Uppgift 10.10 . . . . .	4
1.4 Uppgift 10.15 . . . . .	5
1.5 Uppgift 10.16 . . . . .	6
1.6 Uppgift 10.22 . . . . .	7
1.7 Uppgift 10.25 . . . . .	8
<b>2 Kapitel 11</b>	<b>10</b>
2.1 Uppgift 11.4 . . . . .	10
2.2 Uppgift 11.5 . . . . .	10
2.3 Uppgift 11.8 . . . . .	10
<b>3 Kapitel 12</b>	<b>12</b>
3.1 Uppgift 12.3 . . . . .	12
3.2 Uppgift 12.11 . . . . .	13
3.3 Uppgift 12.12 . . . . .	14
3.4 Uppgift 12.18 . . . . .	14
<b>4 Kapitel 13</b>	<b>16</b>
4.1 Uppgift 13.3 . . . . .	16
4.2 Uppgift 13.4 . . . . .	16
4.3 Uppgift 13.7 . . . . .	17
4.4 Uppgift 13.9 . . . . .	18

4.5 Uppgift 13.16 . . . . . 19

# 1 Kapitel 10

## 1.1 Uppgift 10.2

Find the slope-intercept equations of the lines passing through the following pairs of points. Plot the line in each case.

- a)  $(4, -6)$  and  $(14, 2)$

Ekvationen för en linje — ett förstgradspolynom — är

$$y = mx + b, \quad (1)$$

enligt AMBS (10.3) (kallas här *the slope-intercept equation*), där  $m$  är linjens lutning och  $b$  dess  $y$ -koordinat för  $x = 0$ . Lutningen ges av

$$m = \frac{\text{förändring i } y}{\text{förändring i } x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \quad (2)$$

givet två punkter  $(x_0, y_0)$  samt  $(x_1, y_1)$  på linjen. Alltså blir

$$m = \frac{2 - (-6)}{14 - 4} = \frac{4}{5},$$

och eftersom (2) även kan skrivas

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \implies y - y_0 = m(x - x_0), \quad (3)$$

för en godtycklig punkt  $(x, y)$ , erhålles linjens ekvation som

$$y + 6 = \frac{4}{5}(x - 4),$$

eller, på samma form som i (1), till

$$y = \frac{4}{5}x - \frac{46}{5}.$$

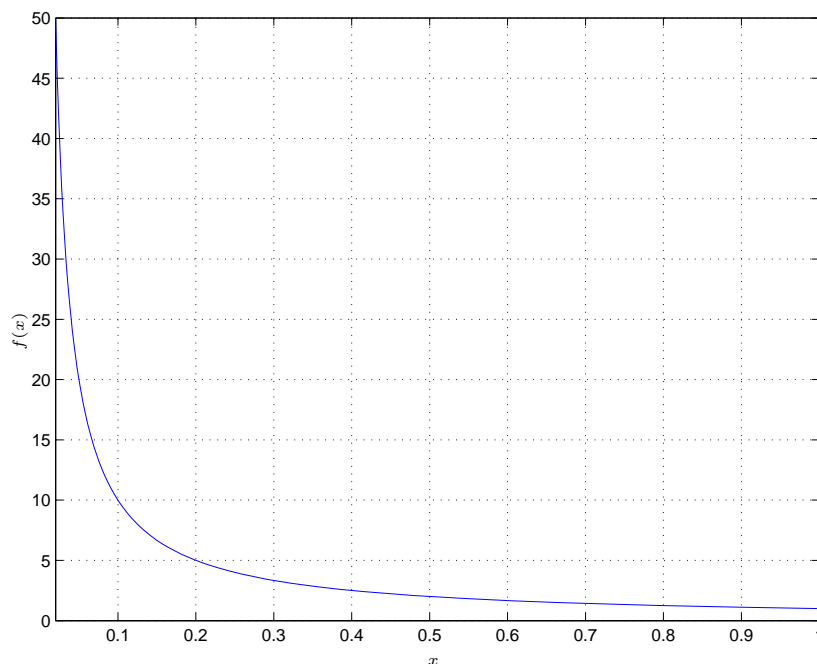
Funktionsgrafen är plottad i Figur 1.

**Anmärkning.** Formen (3) för linjens ekvation kallas i AMBS *the point-slope equation*. Jämför med uppgift 10.1.  $\square$

## 1.2 Uppgift 10.7

Find the point of intersection between the following pair of lines.

- b)  $y - 5 = 7(x - 1)$  and  $y + 3 = -4(x - 9)$



Figur 1: Funktionen  $f(x) = \frac{4}{5}x - \frac{46}{5}$  över intervallet  $[-2, 2]$ .

Två linjer har, såvida de inte är parallella eller sammanfaller (huruvida man då alls talar om två linjer), en skärningspunkt. Vi hittar den genom att t.ex. utnyttja att  $y$ -koordinaten där är densamma, och löser sedan ut  $x$ -koordinaten:

$$y - 5 = 7(x - 1) \implies y = 7x - 2, \quad (4)$$

$$y + 3 = -4(x - 9) \implies y = -4x + 33, \quad (5)$$

ty med (4)=(5) ges

$$7x - 2 = -4x + 33 \implies x = \frac{35}{11}.$$

Insättning i endera av de givna ekvationerna ger därefter den gemensamma  $y$ -koordinaten:

$$y = 7\frac{35}{11} - 2 = \frac{223}{11},$$

dvs. att den sökta skärningspunkten är  $(35/11, 223/11)$ .

**Anmärkning.** Det hade givetvis gått lika bra att i omvänd ordning först låta  $x$ -koordinaterna vara lika för att lösa ut  $y$ -koordinaten.  $\square$

### 1.3 Uppgift 10.10

Show that  $f(x) = x^2$  is decreasing for  $x < 0$ .

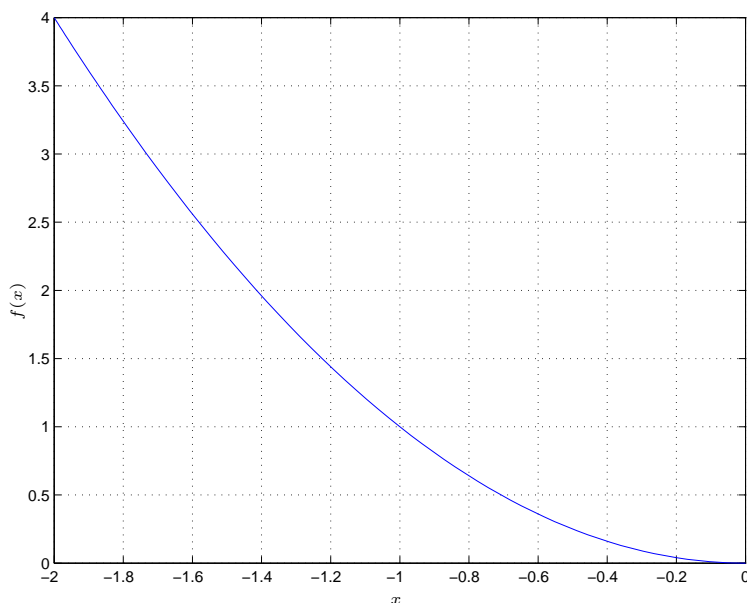
En funktion  $f$  kallas *växande* om det för alla  $x$  och  $y$  i definitionsmängden  $D_f$  gäller att

$$x < y \implies f(x) \leq f(y),$$

eller t.o.m. *strängt växande* såvida

$$x < y \implies f(x) < f(y).$$

Att  $f$  är strängt växande medför givetvis att  $f$  är växande. På liknande sätt definieras *avtagande* resp. *strängt avtagande* funktion. Sedan brukar man säga att  $f$  är *monoton* om funktionen är antingen växande eller avtagande, och motsvarande innebörd ges uttrycket *strängt monoton*.



Figur 2:  $f(x) = x^2$  är strängt avtagande.

För att ta reda på huruvida  $f$  är (strängt) avtagande, jämför vi differensen mellan två funktionsvärden när  $x < y < 0$ :

$$f(x) - f(y) = x^2 - y^2 = \underbrace{(x + y)}_{<0} \underbrace{(x - y)}_{<0} > 0,$$

vilket berättar vad som händer när vi går från  $x$  till  $y$ , dvs. från vänster till höger på tallinjen. Eftersom differensen blir positiv är  $f(x) > f(y)$ , och således måste  $f$  minska för alla  $x < 0$ .  $\square$

## 1.4 Uppgift 10.15

Complete the square for the following quadratic functions, and then plot them for  $3 \leq x \leq 3$ .

a)  $x^2 + 4x + 5$

Vi påminner oss om de s.k. *kvadreringsreglerna*:

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2, \end{aligned} \tag{6}$$

där  $a, b \in \mathbb{R}$ . Det givna andragradspolynomet liknar till formen högerledet (HL) i (6); låt oss därför pröva ett kvadratuttryck som ”verkar passa”, i den mening att de två första termerna blir korrekta (sätt  $a = x$  och  $b = 2$ ):

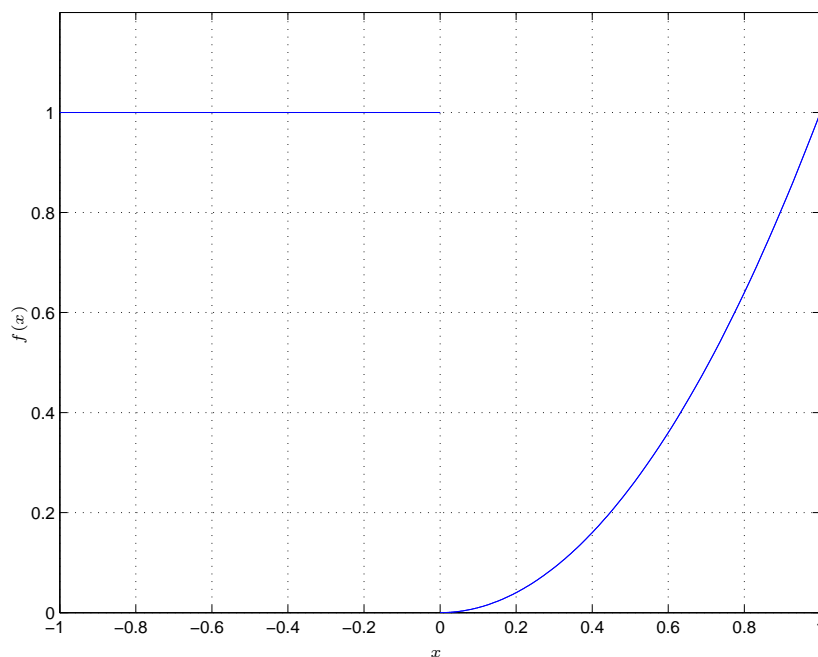
$$(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4.$$

Återstår endast en korrektion (i det här fallet att addera 1 på båda sidor om likheten)

$$(x + 2)^2 + 1 = x^2 + 4x + 5,$$

och vi har lösningen i vänsterledet (VL). Funktionsgrafan återfinns i Figur 3.

**Anmärkning.** Efter kvadratkomplettering får man t.ex. veta mer om hur ett andragradspolynom beter sig. Med  $f(x) = a(x + b)^2 + c$  har  $f$  ett extremvärde  $c$ , som är ett maximum eller minimum beroende av tecknet hos  $a$ . Funktionsgrafan är dessutom translaterad i  $x$ -led efter storleken av  $b$  (se avsnitt 10.5 i AMBS).  $\square$



Figur 3: Funktionen  $f(x) = (x + 2)^2 + 1$  över intervallet  $[-3, 3]$ .

## 1.5 Uppgift 10.16

Write the following finite sums using the summation notation. Be sure to get the starting and ending values for the index correct!

b)  $s_n = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \dots \pm \frac{1}{n^2}$

Vi har för varje ny term teckenväxling samt en nämnare som växer kvadratisk. Efter enklare test fås

$$s_n = \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{1}{i^2},$$

vilket verkar korrekt (särskilt för den första resp. sista termen i summan):

$$\begin{aligned} s_n &= (-1)^1 \frac{1}{1^2} + (-1)^2 \frac{1}{2^2} + (-1)^3 \frac{1}{3^2} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n^2} \\ &= -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

där  $(-1)^n$  kan ersättas av  $\pm$  (om man så vill).

**Anmärkning.** Att byta tecken på  $s_n$  kan exempelvis göras genom att låta exponenten för basen  $-1$  vara  $i + 1$  i stället för  $i$ .  $\square$

c)  $s_n = 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$

Genom att titta på den sista termen i summan inses att den borde skrivas ungefär

$$\begin{aligned} \tilde{s}_n &= \sum_{i=2}^n \frac{1}{i(i+1)} \\ &= \frac{1}{2(2+1)} + \frac{1}{3(3+1)} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}, \end{aligned}$$

bortsett från att man missar den första termen. Men ibland — exempelvis här — är det inte möjligt att samla alla termer ”under ett summatecken”. Svaret blir att lägga till det som saknas:

$$s_n = 1 + \sum_{i=2}^n \frac{1}{i(i+1)},$$

vilket är en lösning av uppgiften (man kan tänka sig andra konstruktioner).  $\square$

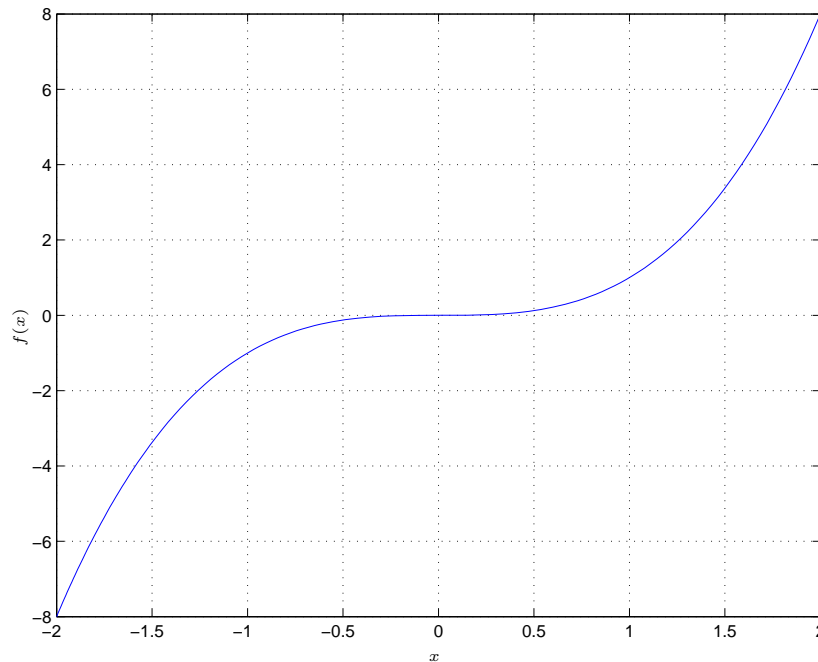
## 1.6 Uppgift 10.22

Show that  $x^3$  is increasing for all  $x$ , and that  $x^4$  is decreasing for  $x < 0$ , but increasing for  $x > 0$ .

Ett bra sätt att lösa uppgiften på är att jämföra differenser mellan funktionsvärden. Vi bildar därför

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) \\ &= (x - y) \frac{1}{2} \underbrace{(x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)^2)}_{>0} < 0, \end{aligned}$$





Figur 4:  $f(x) = x^3$  är en strängt växande funktion.

för alla  $x < y$ . Alltså växer funktionsvärdet vid rörelse från vänster till höger på tallinjen.

Över till  $f(x) = x^4$ : låt först  $x < y < 0$ , vilket ger

$$f(x) - f(y) = x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = \underbrace{(x^2 + y^2)}_{>0} \underbrace{(x + y)}_{<0} \underbrace{(x - y)}_{<0} > 0,$$

så att  $f(x) > f(y)$  och  $f$  avtar (precis vad vi skulle visa). Om sedan i stället  $0 \leq x < y$  fås omvänt

$$f(x) - f(y) = \underbrace{(x^2 + y^2)}_{>0} \underbrace{(x + y)}_{>0} \underbrace{(x - y)}_{<0} < 0,$$

vilket innebär att  $f$  är växande för positiva  $x$ . □

## 1.7 Uppgift 10.25

Plot the following piecewise polynomials for  $-2 \leq x \leq 2$ .

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 1, & -2 \leq x \leq -1 \\ x^2, & -1 < x < 1 \\ x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

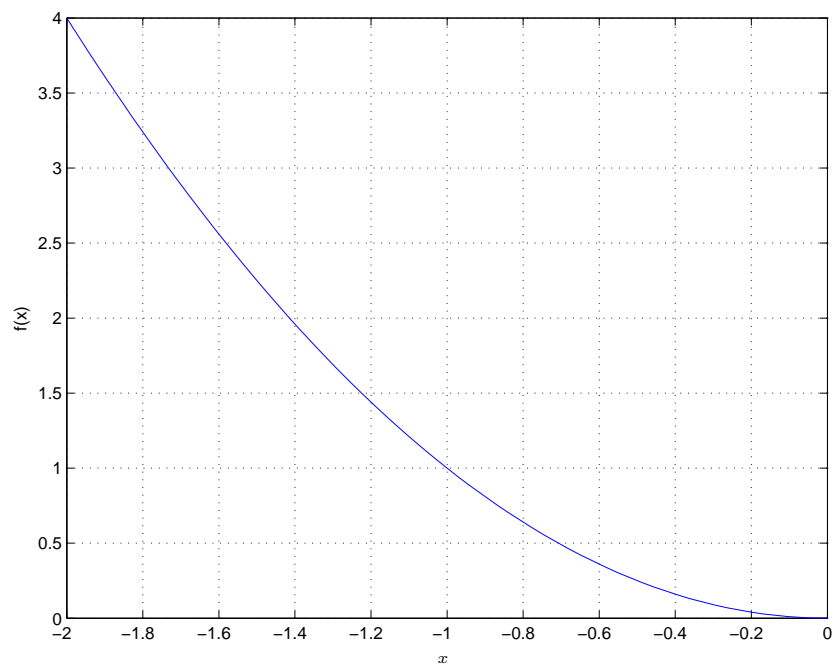
MATLAB är ett utmärkt visualiseringsverktyg. Att plotta Figur 5 är inte svårare än att först definiera det styckvisa polynomet (spara t.ex. funktionsfilen som `piecewise.m`)

```
function y = piecewise(x)

    if x <= -1
        y = 1;
    elseif x <= 1
        y = x^2;
    else
        y = x;
    end
end
```

för att sedan exekvera (i MATLAB-prompten)

```
fplot('piecewise',[-2 2])
grid on
xlabel('x')
ylabel('y')
axis([-2 2 -0.5 2.5])
```



Figur 5: Det styckvisa polynomet  $f(x)$ .

## 2 Kapitel 11

### 2.1 Uppgift 11.4

Use polynomial division for the following rational functions to show that the denominator divides the numerator exactly (or to compute the remainder if not).

b)  $\frac{2x^2-7x-4}{2x+1}$

En repetition av *liggande stolen* från uppgift 7.8b) i förra veckan! Den här gången visserligen för polynom, men principen är trots det densamma. Efter räkning fås

$$\frac{2x^2 - 7x - 4}{2x + 1} = x - 4,$$

vilket kan kontrolleras via multiplikationen  $(2x + 1)(x - 4) = 2x^2 - 7x - 4$ .

**Anmärkning.** Om inte förr, kommer vi att få nytta av polynomdivision i samband med s.k. *partialbråksuppdelning* vid beräkning av vissa integraler i nästa kurs, ALA-b. (Stay tuned ...)

□

### 2.2 Uppgift 11.5

Given  $f_1(x) = 3x - 5$ ,  $f_2(x) = 2x^2 + 1$ , and  $f_3(x) = \frac{4}{x}$ , write out formulas for the following functions.

b)  $f_2 \circ f_3$

Givet två funktioner  $f_2$  och  $f_3$  kan vi definiera en ny och sammansatt funktion,  $f_2 \circ f_3$ , genom att låta output från  $f_3$  bli input för  $f_2$ :

$$\begin{aligned} f_2 \circ f_3 &= (f_2 \circ f_3)(x) = f_2(f_3(x)) \\ &= 2f_3^2(x) + 1 = 2\left(\frac{4}{x}\right)^2 + 1 = \frac{32}{x^2} + 1, \end{aligned}$$

och vi är klara.

**Anmärkning.** För två funktioner  $g_1$  och  $g_2$  är  $g_1 \circ g_2 \neq g_2 \circ g_1$  i vanliga fall.

□

### 2.3 Uppgift 11.8

For the given functions  $f_1$  and  $f_2$  determine the domain of  $f_2 \circ f_1$ .

b)  $f_1(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - 4$  and  $f_2(x) = \frac{x+1}{x}$

Att bestämma definitionsmängden — eller domänen —  $D_F$  för en sammansatt funktion  $f_2 \circ f_1$  är ibland knepigt. Vi måste se till att båda funktionerna  $f_1$  och  $f_2$  är definierade för ett input om  $x$ -värdet ska tillåtas. Här har vi t.ex. att  $f_1$  inte är definierad för  $x = 1$ , eftersom kvoten i första termen då blir ”oändligt stor” (division med 0 är inte tillåten). Av samma anledning får inte heller  $f_1 = 0$ , ty vi har på samma sätt en problematisk kvot i  $f_2$ :

$$F = f_2 \circ f_1 = \frac{f_1 + 1}{f_1}.$$

Alltså måste  $f_1$ :s nollställen uteslutas och vi löser därför

$$f_1(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - 4 = 0 \implies x = 1 \pm \frac{1}{2} = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\}.$$

Utöver dessa tre punkter är hela tallinjen tillåten och vi får

$$D_F = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \right\}.$$

□

### 3 Kapitel 12

#### 3.1 Uppgift 12.3

Show that  $f(x) = 4x - 2x^2$  is Lipschitz continuous on  $[-2, 2]$  directly and compute a Lipschitz constant.

En viktig egenskap för funktioner är *kontinuitet*. En kontinuerlig funktion  $f$  har en graf man typiskt kan plotta utan att behöva lyfta pennan (om vi för en stund tänker oss att MATLAB använder penna — ”skissa” eller ”rita” är måhända ett bättre ord i sammanhanget). Hur som helst, vi förväntar oss att funktionen inte gör oväntade hopp — om input  $x$  ändras, bara lite grann, ska inte heller funktionsvärdet  $f(x)$  drastiskt förändras.

I AMBS införs begreppet *Lipschitzkontinuitet* vilket, i någon mening, mäter hur pass kontinuerlig en funktion är: givet en ändring av input uppskattas den maximala förändringen av output (begränsas uppåt i termer av input).

**Definition 3.1 (LIPSCHITZKONTINUITET).** En funktion  $f$  sägs vara Lipschitzkontinuerlig med Lipschitzkonstant  $L_f$  över intervallet  $I$ , om det finns en (icke-negativ) konstant  $L_f$  sådan att

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L_f |x_1 - x_2|, \quad (7)$$

för alla  $x_1, x_2 \in I$ .

Vi tar ledning av definitionen och bildar differensen

$$f(x_1) - f(x_2) = 4(x_1 - x_2) - 2(x_1^2 - x_2^2) = 4(x_1 - x_2) - 2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2),$$

där vi utnyttjat *konjugatregeln*:  $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$ . Vidare fås

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |4(x_1 - x_2) - 2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)| \\ &= |4 - 2(x_1 + x_2)| |x_1 - x_2| \\ &\leq 12|x_1 - x_2|, \end{aligned} \quad (8)$$

ty det största värdet av  $4 - 2(x_1 + x_2)$  på  $[-2, 2]$  blir 12 (för  $x_1 = x_2 = -2$ ). Men eftersom (8) satisfierar (7), måste  $f$  vara Lipschitzkontinuerlig med just  $L_f = 12$ .

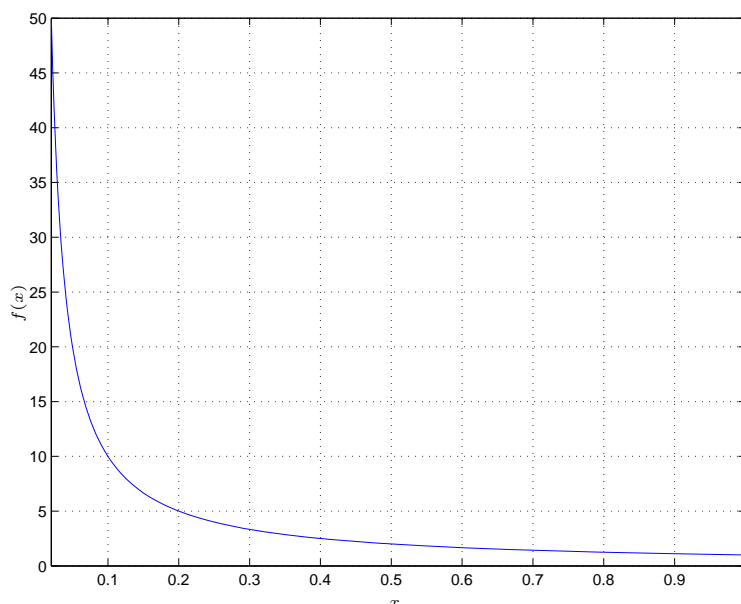
**Anmärkning.** Ofta när man ska visa någonting, och inte riktigt vet hur, är det bra tips att utgå dess definition, och visa att kraven där är uppfyllda.

**Anmärkning.** Ibland är det möjligt att finna flera Lipschitzkonstanter — exempelvis är  $f$  i uppgiften också Lipschitzkontinuerlig med  $L_f = 13$  (med motivationen att  $13 > 12$ ). För det mesta räcker det emellertid att visa att  $f$  uppfyller (7). Finns det sedan trick som förfinar olikheten, dvs. minimerar  $L_f$ , brukar sådant vara mindre viktigt. (Exemplet med  $L_f = 13$  var i det avseendet inte särskilt bra!)  $\square$

### 3.2 Uppgift 12.11

Explain why  $f(x) = \frac{1}{x}$  is not Lipschitz continuous on  $I = (0, 1]$ .

Att en funktion  $f(x)$  inte är Lipschitzkontinuerlig innebär i praktiken t.ex. att den "går mot oändligheten", dvs. att funktionsgrafens har mycket brant lutning någonstans på  $I$ , alternativt att  $f$  gör "oväntade hopp" (mer om det i nästa uppgift!). I Figur 6 ser vi tydligt att  $f$  växer



Figur 6:  $f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow \infty$  när  $x \rightarrow 0^+$  och är inte Lipschitzkontinuerlig på  $I$ .

och inte är begränsad. Det är "självklart". Men hur visar man det strikt? Vi måste använda (7) och visa att olikheten inte gäller.

Låt  $x = \frac{1}{N}$  här vara punkten till höger om  $y = \frac{1}{2N}$  på tallinjen (notera att  $N > 0$ ). Eftersom  $x \neq y$  är det tillåtet att skriva (7) på formen

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq L, \quad (9)$$

och vi finner snabbt att  $|f(x) - f(y)| = |N - 2N| = N$ , medan  $|x - y| = \left| \frac{1}{N} - \frac{1}{2N} \right| = \frac{1}{2N}$ , så att

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = 2N^2.$$

Vad har man för nytta av den observationen? Jo, att  $2N^2 > L$  för  $N > \sqrt{L/2}$ , dvs. att oavsett hur stort ett givet  $L$  är, blir kvoten av VL i (9) alltid större, bara vi närmar oss origo tillräckligt mycket (ges av valet av  $N$  ovan). Det finns inget begränsande  $L$  för vilket olikheten gäller!

Därmed har vi visat att  $f$  inte är Lipschitzkontinuerlig på  $I$ . □

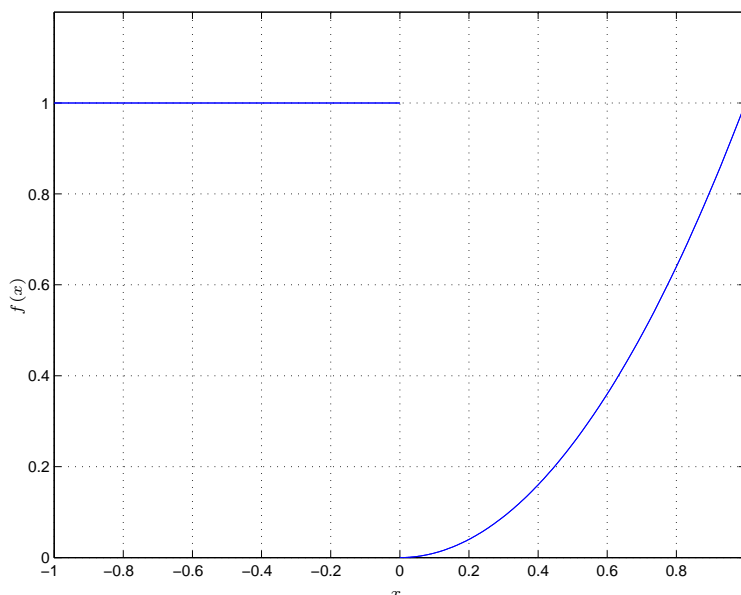
### 3.3 Uppgift 12.12

Explain why the function

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

is **not** Lipschitz continuous on  $I = [-1, 1]$ .

Vi har  $f$  som en styckvis *diskontinuerlig* funktion, eftersom den gör ett hopp i  $x = 0$ , vilket ses i Figur 7. För att påvisa detta resonerar vi ungefär som tidigare: låt  $x = 0$  vara punkten till



Figur 7:  $f$  är inte Lipschitzkontinuerlig.

höger om  $y = -\frac{1}{N}$  på tallinjen ( $N > 0$ ). Då  $x \neq y$  kan man använda (9), med  $|f(x) - f(y)| = |0 - 1| = 1$  samt  $|x - y| = |0 - (-\frac{1}{N})| = \frac{1}{N}$ , så att

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = N,$$

vilket också kan göras större än någon given Lipschitzkonstant om bara  $N > L$ . Viktigt var att välja  $y$  på andra sidan om hoppet i origo. Men svårare än så var det inte!  $\square$

### 3.4 Uppgift 12.18

Use the theorems in this chapter to show that the following functions are Lipschitz continuous on the given intervals, and try to estimate a Lipschitz constant, or prove they are not Lipschitz continuous.

d)  $(1 + \frac{1}{x})^4$  on  $I = [1, 2]$

Den givna funktionen kan betraktas som en sammansatt funktion  $f = f_2 \circ f_1$  med  $f_2(x) = x^4$  samt  $f_1(x) = (1 + \frac{1}{x})$ . Lyckas man påvisa att såväl  $f_1$  som  $f_2$  är Lipschitzkontinuerliga, med Lipschitzkonstanter  $L_1$  resp.  $L_2$ , följer det — via sats 12.6 i AMBS — att  $f$  också är det (med  $L_f = L_1L_2$ ).

Vi testar först  $f_1$ :

$$\begin{aligned} |f_1(x_1) - f_1(x_2)| &= \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = \left| \frac{x_2 - x_1}{x_1x_2} \right| = \frac{1}{|x_1x_2|} |x_1 - x_2| \\ &\leq |x_1 - x_2|, \end{aligned}$$

eftersom  $1/|x_1x_2|$  har största värdet 1 på  $I$  (för  $x_1 = x_2 = 1$ ). Alltså är  $f_1$  Lipschitzkontinuerlig med  $L_1 = 1$ . Vidare, för  $f_2$ , fås

$$\begin{aligned} |f_2(x_1) - f_2(x_2)| &= |x_1^4 - x_2^4| = |(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 - x_2^2)| \\ &= |(x_1^2 + x_2^2)(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)| \\ &= |(x_1^2 + x_2^2)(x_1 + x_2)| |x_1 - x_2| \\ &\leq 32 |x_1 - x_2|, \end{aligned}$$

där vi använder konjugatregeln (två gånger) samt uppskattningen

$$L_2 = \max_I |(x_1^2 + x_2^2)(x_1 + x_2)| = 32,$$

för  $x_1 = x_2 = 2$ . Det följer från den angivna satsen att även  $f$  är Lipschitzkontinuerlig med  $L_f = 1 \cdot 32 = 32$ .  $\square$



## 4 Kapitel 13

### 4.1 Uppgift 13.3

Write the following sequences using the index notation.

c)  $1, -1, 1, -1, 1, \dots$

Med indexnotation kan man kompakt skriva en — möjligen oändlig — följd av tal

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}, \quad (10)$$

på ett sätt liknande summanotation [se uppgift 10.16]. Här har vi en återkommande teckenväxling som t.ex. kan skrivas

$$\{1, -1, 1, -1, 1, \dots\} = \{(-1)^n\}_{n=2}^{\infty},$$

dvs. med  $a_n = (-1)^n$  (notera dock att vi — till skillnad från (10) — börjar uppräkningsen från  $n = 2$ ). Vi kan enkelt kontrollera genom att lista de första talen i följd.  $\square$

### 4.2 Uppgift 13.4

Show that the following limits hold using the formal definition of the limit.

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+3}{7n-1} = \frac{4}{7}$

Användning av den formella definitionen av gränsvärde innebär — enligt avsnitt 13.5 i AMBS — att om gränsvärdet för en följd (givet att den konvergerar) är

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A,$$

ska vi för varje (godtyckligt litet) tal  $\epsilon > 0$  kunna ge ett naturligt tal  $N$  sådant att

$$|a_n - A| \leq \epsilon, \quad n \geq N. \quad (11)$$

Det innebär i ord att bara vi tittar tillräckligt långt bort i följd (åtminstone  $n \geq N$  tal bort) så ska differensen mellan talet vi ser och gränsvärdet vara liten (närmare bestämt mindre än "noggrannheten"  $\epsilon$ ). Förhoppningsvis klarnar det efter ett exempel!

Vi prövar det påstådda gränsvärdet med (11) och får

$$\left| \frac{4n+3}{7n-1} - \frac{4}{7} \right| \leq \epsilon,$$

eller, efter att VL skrivits på minsta gemensamma nämnare (MGN),

$$\frac{25}{7(7n-1)} \leq \epsilon,$$

där absolutbeloppet kan lyftas (VL måste vara positivt). Sedan kan det lösas ut att om

$$n \geq N \geq \frac{1}{7} \left( \frac{25}{7\epsilon} + 1 \right),$$

är differensen tillräckligt liten och (11) uppfylld. Prova! (Märk att ju mindre vi väljer  $\epsilon$  desto större blir  $n$ .) Oavsett hur litet  $\epsilon$  är kan vi alltid ge ett  $N$  som satisfierar kraven. Vi säger att följden

$$\left\{ \frac{4n+3}{7n-1} \right\}_{n=1}^{\infty} \text{ har gränsvärdet } \frac{4}{7}.$$

**Exempel.** Väljs noggranheten  $\epsilon = 0.1$  fås, efter lite beräkningar, att  $n \geq 6$ . Tittar vi på det sjätte talet i följden

$$\left\{ \frac{4n+3}{7n-1} \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{7}{6}, \frac{11}{13}, \frac{15}{20}, \frac{19}{27}, \frac{23}{34}, \frac{27}{41}, \dots \right\},$$

och jämför mot det påstådda gränsvärdet  $A = 4/7$  ges

$$\frac{27}{41} - \frac{4}{7} = 0.0871 < 0.1.$$

Med exempelvis  $\epsilon = 0.01$  blir i stället  $n = 52$ . □

### 4.3 Uppgift 13.7

*Show the following limits to hold using the formal definition for divergence to infinity.*

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} -4n + 1 = -\infty$

En divergent följd saknar gränsvärde, och en sådan som divergerar mot  $\pm\infty$ , är en följd som kan visas inte vara *begränsad*. På liknande sätt för funktioner är  $f$  *uppåt begränsad* om det finns ett tal  $B$  så att

$$f(x) \leq B, \quad \forall x \in D_f,$$

och på motsvarande vis definieras en *nedåt begränsad* funktion. Slutligen blir  $f$  begränsad om den är såväl uppåt som nedåt begränsad.

Vi prövar att införa ett tal  $B > 0$ , så att  $-B$  blir det nedåt begränsande talet — om något sådant alls existerar — för följden  $\{-4n + 1\}$ . Men vi kan visa att

$$-4N + 1 < -B \implies N > \frac{B+1}{4},$$

dvs. att givet  $B$  kan man alltid hitta ett ännu större negativt tal i följden, genom att titta åtminstone  $n > N$  tal bort. Därmed finns heller ingen nedåt begränsning! Slutsatsen blir att  $\{-4n + 1\}$  är divergent mot  $-\infty$ . □

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 + n^2 = \infty$

Återigen blir vår idé att påvisa frånvaron av en (uppåt) begränsning  $B$ . Man vill då kunna visa att

$$N^3 + N^2 > B, \quad (12)$$

men eftersom vi har ett polynom — och inte ett monom som i förra deluppgiften — är det lite svårare. Men med  $N^3 + N^2 > N^3$ , räcker det att visa (12) för  $N^3$ , och i så fall blir  $N > B^{1/3}$ . Väljs bara  $n > N$  räcker inget givet  $B$  till. Med andra ord är  $\{n^3 + n^2\}$  divergent mot  $\infty$ .  $\square$

#### 4.4 Uppgift 13.9

*Find the values.*

a)  $1 - .5 + .25 - .125 + \dots$

Den givna summan överensstämmer med en geometrisk summa — se uppgift 7.10 från vecka 1 — där

$$s_n = 1 - .5 + .25 - .125 + \dots = \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k,$$

dvs. med första termen  $a = 1$  och kvoten  $x = -\frac{1}{2}$ . Vi påminner oss om formeln för värdet av en geometrisk summa

$$s_n = \frac{a(1 - x^n)}{1 - x},$$

och konstaterar gränsvärde saknas när  $n \rightarrow \infty$  för  $|x| \leq 1$  (i sådana fall heter det att summan divergerar).

**Anmärkning.** Även den teckenväxlande följd

$$\{1, -1, 1, -1, 1, \dots\},$$

är divergent. (Det är inte nödvändigtvis så att en divergent följd  $\{x_i\} \rightarrow \pm\infty$ , utan vad vi vet är att den saknar gränsvärde.)

Om däremot  $|x| < 1$  kommer termen  $-x^n$  att försvinna med  $n$  så att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1 - x}. \quad (13)$$

Alltså blir, efter insättning, vårt svar

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}.$$

$\square$

b)  $3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \dots$

Även här, efter faktorisering, har vi en geometrisk summa (med  $a = 1$  och  $x = \frac{1}{4}$ )

$$s_n = 3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \dots = 3 \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots \right) = 3 \sum_{k=0}^n \frac{1}{4^k}.$$

Eftersom  $|x| = \frac{1}{4} < 1$  får vi via (13) att

$$3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} = 3 \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \right) = 4.$$

□

c)  $5^{-2} + 5^{-3} + 5^{-4} + \dots$

Änno en geometrisk summa. Den här gången med  $a = \frac{1}{25}$  och  $x = \frac{1}{5}$ . Vi får

$$s_n = 5^{-2} + 5^{-3} + 5^{-4} + \dots = \sum_{k=0}^n \frac{1}{25 \cdot 5^k},$$

och med  $|x| = \frac{1}{5} < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{25 \left( 1 - \frac{1}{5} \right)} = \frac{1}{20},$$

efter insättning i (13).

□

## 4.5 Uppgift 13.16

Compute the limits of the sequences  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  with the indicated terms (or show their divergence).

b)  $a_n = 4n^2 - 6n$

Det är ofta arbetsamt att slaviskt använda sig av definitionen vid beräkning av gränsvärden. Man gör bäst i att följa genvägar varhelst de dyker upp. Här kan vi t.ex. faktorisera det givna uttrycket

$$4n^2 - 6n = 2n(2n - 3),$$

och det blir tydligt att båda (positiva) faktorerna växer för  $n > 1$ . Men eftersom följderna växer ohejdbart, saknas egentligt gränsvärde, och vi säger att den är *divergent* (mot  $+\infty$ ).

**Anmärkning.** Ett annat sätt att resonera — när vi t.ex. som här har termer med olika tecken — är att en kvadratisk funktion växer snabbare än en linjär, så att den positiva termen,  $4n^2$ , överväger den negativa,  $-6n$ . □

d)  $a_n = \frac{2n^2 + 9n + 3}{6n^2 + 2}$

Ett annat vanligt trick, ofta användbart i samband med gränsvärden av kvoter, är att förkorta uttrycket med nämnarens dominerande term. Här kan man t.o.m. enklare använda  $n^2$  och få gränsvärdet (notera att tre termer försvinner med växande  $n$ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 9n + 3}{6n^2 + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 9/n + 3/n^2}{6 + 2/n} = \frac{1}{3}.$$