ALA-a 2005

RÄKNEÖVNING — VECKA 3

David Heintz, 25 september 2005

Innehåll

1 Reella tal

1.1 Uppgift 15.2

Suppose that x and y are two real numbers, whose truncated decimal expansions are given by the sequences $\{x_i\}$ and $\{y_i\}$, respectively. Use (7.14) and (15.4) to obtain estimates on the following differences.

(a) $|(x+y)-(x_i+y_i)|$

Triangelolikheten (TO) är ett bra hjälpmedel i samband med vissa uppskattningar. Tipset i (7.14) introducerar en variant av TO [till skillnad från den i uppgift 5.16(d)]:

$$|a-b| \leq |a|+|b|, \quad \forall a,b \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Bevisföringen är densamma som tidigare (ersätt endast b med $-b$ i 5.16(d) — gör det som en övning). Ytterligare får vi veta från [AMBS, ekv. 15.4] att

$$|x-x_i| \leq 10^{-i}, \quad \text{för } i=1,2,\dots, \tag{2}$$

vilket måhända inses lättare via ett exempel.

Exempel. Med $x = 9/8 = 1.125$ får vi för $x_1 = 1.1$ att

$$|x-x_1| = |1.125-1.1| = 0.025 \leq 10^{-1},$$

efter direkt beräkning.

Genom att i tur och ordning tillämpa (1)–(2) fås

$$|(x+y)-(x_i+y_i)| = |(x-x_i)-(y_i-y)| \leq |x-x_i|+|y-y_i| \leq 10^{-i}+10^{-i} = 2\cdot 10^{-i},$$

varför vår uppskattning tydligen blir

$$x+y = x_i+y_i \pm 2\cdot 10^{-i}.$$

□

(b) $|xy-x_iy_i|$

Vi får en nyttig ledtråd i omskrivningen

$$xy-x_iy_i = (x-x_i)y+(y-y_i)x_i, \tag{3}$$

eftersom faktorerna $x-x_i$ och $y-y_i$ kan uppskattas via (2). Man får

$$|xy-x_iy_i| = |(x-x_i)y+(y-y_i)x_i| \leq |x-x_i|\,|y|+|y-y_i|\,|x_i|,$$

via TO. Sedan fortsätter vi med

$$\begin{aligned}|x-x_i|\,|y|+|y-y_i|\,|x_i| &\leq 10^{-i}\,|y|+10^{-i}\,|x_i| = 10^{-i}\,|y|+10^{-i}\,|(x_i-x)+x| \\ &\leq 10^{-i}\,|y|+10^{-i}(|x-x_i|+|x|) \leq 10^{-i}\,|y|+10^{-i}(10^{-i}+|x|) \\ &= 10^{-i}(|y|+|x|)+10^{-2i},\end{aligned}$$

enligt (2), omskrivningen $x_i = x_i-x+x$, TO samt ännu en gång (2). Därmed har vi härlett en uppskattning av $|xy-x_iy_i|$ i termer av data x och y. □

1.2 Uppgift 15.3

Find i as small as possible such that $|xy-x_iy_i| \leq 10^{-6}$ if $x \approx 100$ and $y \approx 1$.

Vi har från föregående uppgift att

$$|xy-x_iy_i| \leq 10^{-i}(|y|+|x|)+10^{-2i},$$

så att insättning av data ger

$$|xy-x_iy_i| \leq 10^{-i}(1+100)+10^{-2i} = 10^{-i}(10^0+10^2)+10^{-2i} = 10^{-i}+10^{2-i}+10^{-2i}.$$

Vi ser från den dominanta termen 10^{2-i} i högerledet (HL) att $i \geq 9$ för att $|xy-x_iy_i| \leq 10^{-6}$ säkert. □

1.3 Uppgift 15.6

Let x be the limit of the sequence of rational numbers $\{x_i\}$, where the first $i-1$ decimal places of x_i agree with the first $i-1$ decimal places of $\sqrt{2}$, the i:th decimal place is equal to 3, and the rest of the decimal places are zero. Is $x=\sqrt{2}$? Give a reason for your answer!

Den givna följden kan utskrivet antas vara

$$\{x_i\}_{i=1}^{\infty} = \{1.30\cdots, 1.430\cdots, 1.4130\cdots, 1.41430\cdots, 1.414230\cdots, \dots\},$$

som är att jämföra mot $\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$. För i är tydligen de första $i-1$ decimalerna "korrekta" (i den mening att de överensstämmer med motsvarande decimaler i utvecklingen av $\sqrt{2}$). Ju högre i räknas upp desto mer lika blir talen x_i och $\sqrt{2}$. Alltså kan man givet $\epsilon > 0$ alltid välja ett tillräckligt stort $N = N(\epsilon)$ så att

$$\left|x_N-\sqrt{2}\right| \overset{(2)}{\leq} 10^{1-N} \leq \epsilon,$$

genom att titta åtminstone $N \geq 1-\log(\epsilon)$ tal bort i följden. Det följer att

$$x = \lim_{i\to\infty} x_i = \sqrt{2},$$

och svaret på uppgiftsfrågan blir "Ja!". □

1.4 Uppgift 15.11

Show that the following sequences are Cauchy sequences.

(c) $\{i/(3i+1)\}$

Vi inleder med en definition.

Definition 1.1 (CAUCHYFÖLJD). *En följd $\{x_i\}$ sägs vara en Cauchyföljd om det för alla $\epsilon > 0$ finns ett naturligt tal N så att*

$$|x_i - x_j| \leq \epsilon, \quad \forall i, j \geq N. \tag{4}$$

En Cauchyföljd innehåller — i någon mening — tal som blir mer och mer lika varandra ju längre bort i den man tittar. Att påvisa (4), dvs. besvara huruvida en följd är en Cauchyföljd eller inte, liknar ungefär vad vi gjorde i samband med gränsvärden.

Vi utgår från (4) och bildar differensen i vänsterledet (VL):

$$\left|\frac{i}{3i+1} - \frac{j}{3j+1}\right| = \left|\frac{(3j+1)i - (3i+1)j}{(3i+1)(3j+1)}\right| = \left|\frac{i-j}{(3i+1)(3j+1)}\right|,$$

efter omskrivning på gemensamt bråkstreck samt förenkling. Om vi nu för $\alpha \in \mathbf{N}$ antar att $j = N + \alpha$ och $i = N$ följer det

$$\left|\frac{i-j}{(3i+1)(3j+1)}\right| = \frac{\alpha}{(3N+1)[3(N+\alpha)+1]},$$

vilket är en följd med gränsvärdet 0 när $N \to \infty$. Med andra ord måste den vara en Cauchyföljd (oavsett hur litet ϵ är kan vi alltid finna ett $N = N(\epsilon)$ så att (4) är uppfyllt).

En enkel uppskattning av N ges via

$$\frac{\alpha}{(3N+1)[3(N+\alpha)+1]} < \frac{\alpha}{9N^2} \leq \epsilon \implies N \geq \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\alpha}{\epsilon}},$$

där endast nämnarens dominanta term tagits med. □

1.5 Uppgift 15.12

*Show that the sequence $\left\{i^2\right\}$ is **not** a Cauchy sequence.*

För att lösa uppgiften använder vi ett *motsatsbevis*. Här antas ett påstående vara sant, varpå, i bästa fall, motsatsen kan visas. Alltså förutsätter vi till en början att följden satisfierar (4). Men då ska också

$$\left|i^2 - j^2\right| = \{\text{låt t.ex. } i = N+1,\ j = N\} = |(N+1)^2 - N^2| = |2N+1|,$$

vilket strider mot antagandet, ty för $\epsilon < 3$ fås att

$$2N + 1 \nleq \epsilon,$$

eftersom $N \geq 1$ är ett naturligt tal. Vi har härlett en motsägelse (ϵ kan ju vara ”hur litet som helst”)! Därmed måste det ursprungliga antagandet vara fel, och slutsatsen blir att $\left\{i^2\right\}$ inte är en Cauchyföljd.

Anmärkning. Att den givna följden inte är en Cauchyföljd inses direkt av att talen växer kvadratiskt med i, så att på varandra följande tal successivt hamnar längre och längre ifrån varandra. □

1.6 Uppgift 15.15

Let $\{x_i\}$ and $\{y_i\}$ be Cauchy sequences with limits x and y respectively. Show that the following sequences indeed are Cauchy sequences and compute their limits. (For (b) also assume that there is a constant c such that $y_i \geq c > 0$ for all i.)

(a) $\{x_i - y_i\}$

Vi utgår från definitionen

$$\begin{aligned} |x_i - y_i - (x_j - y_j)| &= |(x_i - x_j) - (y_i - y_j)| \\ &\leq |x_i - x_j| + |y_i - y_j|, \end{aligned} \tag{5}$$

via TO. Men eftersom $\{x_i\}$ och $\{y_i\}$ är givna Cauchyföljder vet vi att

$$\lim_{i,j\to\infty} |x_i - x_j| = 0, \quad \lim_{i,j\to\infty} |y_i - y_j| = 0, \tag{6}$$

varför $|x_i - y_i - (x_j - y_j)| \to 0$ när $i, j \to \infty$. Med andra ord kan VL i (5) alltid göras mindre än en noggrannhet ϵ efter val av tillräckligt stora i, j. Därav är $\{x_i - y_i\}$ en Cauchyföljd.

Man skulle, om man vill, också kunna skriva

$$|x_i - y_i - (x_j - y_j)| \leq \underbrace{|x_i - x_j|}_{\leq \epsilon_1} + \underbrace{|y_i - y_j|}_{\leq \epsilon_2} \leq \epsilon,$$

för alla $i, j \geq N = N(\epsilon)$.

För att visa gränsvärdet av $\{x_i - y_i\}$ utnyttjar vi att följderna är konvergenta med

$$\lim_{i\to\infty} x_i = x, \quad \lim_{i\to\infty} y_i = y, \tag{7}$$

och får därför (pröva intuitivt med gränsvärdet $x - y$)

$$|x_i - y_i - (x - y)| = |(x_i - x) + (y - y_i)| \leq \underbrace{|x - x_i|}_{\leq \epsilon_1} + \underbrace{|y - y_i|}_{\leq \epsilon_2} \leq \epsilon,$$

med $i \geq N = N(\epsilon)$. $\square$

(b) $\{x_i/y_i\}$

Vi prövar först om $\{x_i/y_i\}$ är en Cauchyföljd:

$$\left|\frac{x_i}{y_i} - \frac{x_j}{y_j}\right| = \left|\frac{x_i y_j - x_j y_i}{y_i y_j}\right| = \left|\frac{(x_i - x_j)y_j + (y_j - y_i)x_j}{y_i y_j}\right| \leq \frac{|(x_i - x_j)y_j + (y_j - y_i)x_j|}{c^2},$$

vilket, p.g.a. (6), går mot noll när $i, j \to \infty$. Man kan alltid satisfiera (4), oavsett hur litet ϵ är, och den givna följden måste vara en Cauchyföljd.

Som gränsvärde prövas intuitivt x/y

$$\left|\frac{x_i}{y_i} - \frac{x}{y}\right| = \left|\frac{x_i y - x y_i}{y_i y}\right| = \left|\frac{(x_i - x)y + (y - y_i)x}{y_i y}\right| \leq \frac{|(x_i - x)y + (y - y_i)x|}{c^2},$$

vilket genom (7) visar sig vara korrekt eftersom

$$\left|\frac{x_i}{y_i} - \frac{x}{y}\right| \to 0, \quad i, j \to \infty,$$

med $\{x_i\}$ och $\{y_i\}$ som konvergenta följder. $\square$

1.7 Uppgift 15.16

Show that a sequence $\{x_i\}$ which converges is a Cauchy sequence.

Vi vet att följden är konvergent och kallar gränsvärdet x. Man kan nu från (4) bilda differensen

$$|x_i - x_j| = |(x_i - x) + (x - x_j)| \leq \underbrace{|x - x_i|}_{\leq\epsilon} + \underbrace{|x - x_j|}_{\leq\epsilon} \leq 2\epsilon, \quad \forall i, j \geq N = N(\epsilon), \tag{8}$$

via omskrivningen $x_i - x_j = x_i - x + x - x_j$, TO samt följdens konvergens. Därmed kan alltid (4) uppfyllas och påståendet är visat.

Anmärkning. Märk att det är oväsentligt att det står 2ϵ i HL av (8) i stället för ϵ. Poängen är ju att talen x_i och x_j ska kunna hamna godtyckligt nära varandra, bara vi tittar tillräckligt långt bort i följden, och i den kontexten spelar en faktor 2 ingen roll (förutom att N möjligen blir lite större). $\square$

2 Funktionen $y = x^r$

2.1 Uppgift 18.3

A Lipschitz continuous function with Lipschitz constant L, where $0 \leq L < 1$, is also called a "contraction mapping". Decide which of the functions are contraction mappings on $\mathbb{R}$.

(c) $f(x) = (1 + x)^{-1/2}$

Vi utgår från definitionen av Lipschitzkontinuitet och bildar

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right| = \frac{\left|\sqrt{1+y^2} - \sqrt{1+x^2}\right|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}},$$

skrivet på gemensamt bråkstreck. Därefter kan man förlänga med konjugatet

$$\begin{aligned}
\frac{\left|\sqrt{1+y^2} - \sqrt{1+x^2}\right|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} &= \frac{|y^2 - x^2|}{\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}\right)\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} \\
&= \frac{|x + y|}{\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}\right)\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}\,|x - y| \\
&\leq \frac{|x| + |y|}{\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}\right)\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}\,|x - y|,
\end{aligned}$$

och ännu en gång utnyttja TO. Så långt komna återstår det att bestämma Lipschitzkonstanten

$$L = \max_{x,y\in\mathbb{R}} \frac{|x| + |y|}{\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}\right)\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}},$$

där vi med fördel drar nytta av

$$\left.\begin{array}{l} |x| \leq \sqrt{1+x^2} \\ |y| \leq \sqrt{1+y^2} \end{array}\right\} \implies |x| + |y| \leq \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2},$$

eftersom det då måste gälla att

$$\frac{|x| + |y|}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}} \leq 1, \tag{9}$$

med likhet om och endast om endera (eller båda) av $x, y \to \pm\infty$. Det inses exempelvis (i övre gräns för fixt $y > 0$) via

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + y}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{y}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + \sqrt{\frac{1+y^2}{x^2}}} \to \frac{1+0}{1+0} = 1,$$

efter förkortning med x. Med anledning av observationen (9) kan lösningen delas in i två steg

$$\text{i) } |x|, |y| \leq a < \infty, \quad \text{ii) } |x|, |y| \to \infty,$$

för ett fixt a. Vi kan t.ex. låta $a = \frac{1}{2}$.

i) $|x|, |y| \le \frac{1}{2}$ (x och y ligger — i en möjligt vid mening — nära origo):

$$\frac{|x|+|y|}{\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}\right)\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} = \underbrace{\frac{|x|+|y|}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}}}_{\le 1/2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}}_{\le 1} \le \frac{1}{2},$$

vilket inte motsäger att f kan vara en kontraktion.

ii) $|x|, |y| \to \infty$ (x och/eller y närmar sig oändligheten):

$$\frac{|x|+|y|}{\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}\right)\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} = \underbrace{\frac{|x|+|y|}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}}_{\to 0} \to 0,$$

varpå L bokstavligt talat blir försvinnande liten.

Sammataget innebär resultaten från i) och ii) att $L < 1$ alltid, så även om inte L kunde bestämmas exakt, är det ändå klart att f måste vara en kontraktion. □

3 Fixpunkter och kontraktioner

3.1 Uppgift 19.3

Rewrite the following root problems as fixed point problems in three different ways each.

(a) $7x^5 - 4x^3 + 2 = 0$

När man löser rotproblem söks rötter (nollställen) till ekvationen $f(x) = 0$. Fixpunktsproblemet är ett besläktat problem som formuleras enligt följande: finn $\overline{x}$ så att

$$g(\overline{x}) = \overline{x},$$

där $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en Lipschitzkontinuerlig funktion. Namnet ”fixpunktsproblem” syftar på att $\underbrace{\text{INPUT}}_{\overline{x}} = \underbrace{\text{OUTPUT}}_{g(\overline{x})}$.

Rotproblem kan exempelvis översättas i fixpunktsproblem via omskrivningen

$$f(x) = 0 \implies kf(x) = 0 \implies \underbrace{kf(x) + x}_{g(x)} = x, \tag{10}$$

för $k \neq 0$. Vi kommer senare i kursen att få en motivering av formeln (10), där ett smart val av k visar sig lämpligt för implementation i MATLAB (Newtons metod).

Med $k = 1$ fås enkelt $g(x) = f(x)+x = 7x^5-4x^3+2+x = x$ som ett alternativ, medan $k = \frac{1}{10}$ leder till $g(x) = \frac{1}{10}f(x) + x = \frac{1}{10}\left(7x^5 - 4x^3 + 2\right) + x = x$. Ett tredje och sista alternativ för omvandling av rot- till fixpunktsproblem kan vara

$$7x^5 - 4x^3 + 2 = 0 \implies 7x^5 + 2 = 4x^3 \implies \underbrace{\tfrac{1}{4}\left(7x^5+2\right)^{1/3}}_{g(x)} = x.$$

□

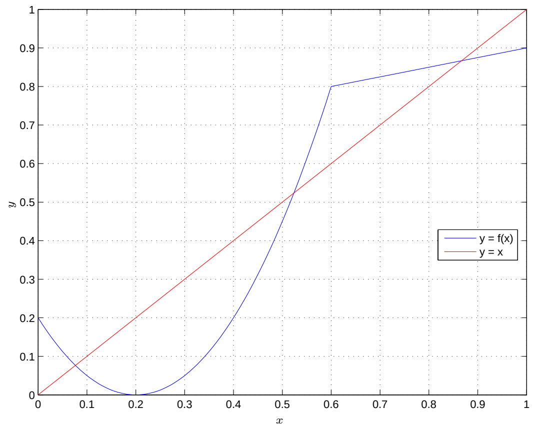
3.2 Uppgift 19.4

Draw a Lipschitz continuous function f on the interval $[0, 1]$ that has three fixed points such that $f(0) > 0$ and $f(1) < 1$.

Grafiskt fås eventuella fixpunkter i skärningspunkterna mellan linjen $y = x$ och kurvan $y = f(x)$. Om t.ex. $f(x)$ är det styckvisa polynomet

$$f(x) = \begin{cases} 5\left(x - \frac{1}{5}\right)^2, & 0 \le x < \frac{3}{5}, \\ \frac{1}{4}x + \frac{13}{20}, & \frac{3}{5} \le x \le 1, \end{cases}$$

kan man — via lämplig värdetabell (eller bättre i MATLAB) — plotta



Figur 1: $f(x)$ har tre fixpunkter.

Det är även möjligt att lösa ut fixpunkterna genom att lösa $f(x) = x$. De borde vara $\overline{x}_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{10}$ samt $\overline{x}_3 = \frac{13}{15}$. Eller? Pröva! (Kontrollera annars/också med fixpunktslösarna i MATLAB under läsvecka 4.) □

3.3 Uppgift 19.12

Find an explicit formula for the n:th fixed point iterate x_n given the function $g(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$. Prove that x_n converges as n increases and compute the limit.

Givet ett startvärde x_0 fås successivt nya tal enligt $x_n = g(x_{n-1})$. Låt oss skriva ned de första uppdateringarna, med vars hjälp vi identifierar en generell formel:

$$\begin{aligned}
x_1 &= g(x_0) = \tfrac{3}{4}x_0 + \tfrac{1}{4} \\
x_2 &= g(x_1) = \tfrac{3}{4}x_1 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{3}{4}x_0 + \tfrac{1}{4}\right) + \tfrac{1}{4} \\
x_3 &= g(x_2) = \tfrac{3}{4}x_2 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{3}{4}\left(\tfrac{3}{4}x_0 + \tfrac{1}{4}\right) + \tfrac{1}{4}\right) + \tfrac{1}{4} \\
&\vdots \\
x_n &= g(x_{n-1}) = \ldots = \left(\tfrac{3}{4}\right)^n x_0 + \tfrac{1}{4}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\tfrac{3}{4}\right)^i.
\end{aligned}$$

Hur blir det med gränsvärdet? Jo, eftersom $(\frac{3}{4})^n \to 0$ när $n \to \infty$, och summan råkar vara en geometrisk sådan, där första termen $a = 1$ och kvoten $x = \frac{3}{4}$, fås

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1-0}{\frac{1}{4}} = 1,$$

så att x_n konvergerar mot gränsvärdet 1. □

3.4 Uppgift 19.19

Show that $g(x) = \frac{2}{3}x^3$ is Lipschitz continuous on $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ with Lipschitz constant $L = \frac{1}{2}$.

Definitionen av Lipschitzkontinuitet säger att

$$|g(x) - g(y)| = \left|\tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{2}{3}x^3\right| = \tfrac{2}{3}\left|x^3 - y^3\right| = \tfrac{2}{3}\left|x^2 + xy + y^2\right||x - y|,$$

så att Lipschitzkonstanten ges av

$$L = \max_{x,y\in I} \tfrac{2}{3}\left|x^2 + xy + y^2\right| = \left\{\text{låt t.ex. } x = y = \tfrac{1}{2}\right\} = \tfrac{2}{3}\left|\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right| = \tfrac{1}{2},$$

vilket skulle visas.