ALA-a 2005

RÄKNEÖVNING — VECKA 3

David Heintz, 19 september 2005

Innehåll

1 Kapitel 15

1.1 Uppgift 15.2

Suppose that x and y are two real numbers, whose truncated decimal expansions are given by the sequences $\{x_i\}$ and $\{y_i\}$, respectively. Use (7.14) and (15.4) to obtain estimates on the following differences.

(a) $|(x+y)-(x_i+y_i)|$

Triangelolikheten (TO) är ett bra hjälpmedel i samband med vissa uppskattningar. Tipset i (7.14) introducerar en variant av TO [till skillnad från den i uppgift 5.16(d)]:

$$|a-b| \leq |a|+|b|, \quad \forall a,b \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Bevisföringen är densamma som för TO [ersätt endast b med $-b$ i 5.16(d) — gör det som en övning]. Ytterligare får vi veta från (15.4) att

$$|x-x_i| \leq 10^{-i}, \quad \text{för } i=1,2,\ldots, \tag{2}$$

vilket måhända inses lättare via ett exempel.

Exempel. Med $x = 9/8 = 1.125$ får vi för $x_1 = 1.1$ att

$$|x-x_1| = |1.125-1.1| = 0.025 \leq 10^{-1},$$

efter direkt beräkning.

Genom att i tur och ordning tillämpa (1)–(2) fås

$$\begin{aligned} |(x+y)-(x_i+y_i)| &= |(x-x_i)-(y_i-y)| \\ &\leq |x-x_i|+|y-y_i| \\ &\leq 10^{-i}+10^{-i} = 2\cdot 10^{-i}, \end{aligned}$$

varför vår uppskattning tydligen blir

$$x+y = x_i+y_i \pm 2\cdot 10^{-i}.$$

□

(b) $|xy-x_iy_i|$

Vi får en nyttig ledtråd i omskrivningen

$$xy-x_iy_i = (x-x_i)y+(y-y_i)x_i, \tag{3}$$

eftersom faktorerna $x-x_i$ och $y-y_i$ avtar med i. Då $\{x_i\}$ och $\{y_i\}$ är konvergenta vet vi att

$$\lim_{i\to\infty} x_i = x, \quad \lim_{i\to\infty} y_i = y,$$

och får därför

$$\begin{aligned} |xy - x_i y_i| &= |(x - x_i)y + (y - y_i)x_i| \\ &\leq |x - x_i|\,|y| + |y - y_i|\,|x_i|\,, \end{aligned}$$

via TO. Sedan fortsätter det t.ex. med

$$\begin{aligned} |x - x_i|\,|y| + |y - y_i|\,|x_i| &\leq 10^{-i}\,|y| + 10^{-i}\,|x_i| \\ &= 10^{-i}\,|y| + 10^{-i}\,|(x_i - x) + x| \\ &\leq 10^{-i}\,|y| + 10^{-i}(|x - x_i| + |x|) \\ &\leq 10^{-i}\,|y| + 10^{-i}(10^{-i} + |x|) \\ &= 10^{-i}(|y| + |x|) + 10^{-2i}, \end{aligned}$$

enligt (15.4), omskrivningen $x_i = x_i - x + x$, TO samt ännu en gång (15.4). Därmed har vi härlett en uppskattning av $|xy - x_i y_i|$ i termer av data x och y, vilket sannolikt är det bästa man kan hoppas på. □

1.2 Uppgift 15.6

Let x be the limit of the sequence of rational numbers $\{x_i\}$, where the first $i-1$ decimal places of x_i agree with the first $i-1$ decimal places of $\sqrt{2}$, the i:th decimal place is equal to 3, and the rest of the decimal places are zero. Is $x = \sqrt{2}$? Give a reason for your answer!

Den givna följden kan utskrivet antas vara

$$\{x_i\}_{i=1}^{\infty} = \{1.30\cdots, 1.430\cdots, 1.4130\cdots, 1.41430\cdots, 1.414230\cdots, \ldots\}\,,$$

som är att jämföra mot $\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$. För i är tydligen de första $i-1$ decimalerna ”korrekta” (i den mening att de överensstämmer med motsvarande decimaler i utvecklingen av $\sqrt{2}$). Ju högre i räknas upp desto mer lika blir talen x_i och $\sqrt{2}$. Alltså kan man givet $\epsilon > 0$ alltid välja ett tillräckligt stort $N = N(\epsilon)$ så att

$$\left|x_N - \sqrt{2}\right| \overset{(2)}{\leq} 10^{1-N} \leq \epsilon,$$

genom att t.ex. titta $n \geq N = 1 - \log(\epsilon)$ tal bort i följden. Enligt definitionen av gränsvärde följer då

$$x = \lim_{i\to\infty} x_i = \sqrt{2},$$

och svaret på uppgiftsfrågan blir ”Ja!”. □

1.3 Uppgift 15.11

Show that the following sequences are Cauchy sequences.

(c) $\left\{\frac{i}{3i+1}\right\}$

Vi inleder med en definition.

Definition 1.1 (CAUCHYFÖLJD). *En följd* $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ *sägs vara en Cauchyföljd om det för alla* $\epsilon > 0$ *finns ett naturligt tal* N *så att*

$$|x_i - x_j| \leq \epsilon, \quad \forall i, j \geq N. \tag{4}$$

En Cauchyföljd innehåller — i någon mening — tal som blir mer och mer lika varandra ju längre bort i den man tittar. Att påvisa (4), dvs. besvara huruvida en följd är en Cauchyföljd eller inte, liknar ungefär vad vi gjorde i samband med gränsvärden.

Vi utgår från (4) och bildar differensen i vänsterledet (VL):

$$\left|\frac{i}{3i+1} - \frac{j}{3j+1}\right| = \left|\frac{(3j+1)i - (3i+1)j}{(3i+1)(3j+1)}\right| = \left|\frac{i-j}{(3i+1)(3j+1)}\right|,$$

efter omskrivning på gemensamt bråkstreck samt förenkling. Om vi t.ex. antar att $j > i$ (eller omvänt med samma resultat), där $j = N + \alpha$ (låt $\alpha \in \mathbb{N}$) och $i = N$, följer det

$$\left|\frac{i-j}{(3i+1)(3j+1)}\right| = \frac{\alpha}{(3N+1)[3(N+\alpha)+1]},$$

vilket ger en följd med gränsvärdet 0 när $N \to \infty$. Med andra ord måste $\left\{\frac{i}{3i+1}\right\}$ vara en Cauchyföljd (oavsett hur litet ϵ är kan vi alltid finna ett $N = N(\epsilon)$ så att (4) är uppfylld).

En enkel uppskattning av N ges av

$$\frac{\alpha}{(3N+1)[3(N+\alpha)+1]} \leq \frac{\alpha}{9N^2} \leq \epsilon \implies N \geq \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\alpha}{\epsilon}},$$

där endast nämnarens dominanta term tagits med. □

1.4 Uppgift 15.12

Show that the sequence $\left\{i^2\right\}$ *is* ***not*** *a Cauchy sequence.*

För att lösa uppgiften använder vi ett s.k. *motsatsbevis*. Här antas ett påstående vara sant, varpå, i bästa fall, motsatsen kan visas. Alltså förutsätter vi till en början att $\left\{i^2\right\}$ satisfierar (4). Men då ska också

$$\left|i^2 - j^2\right| = \{\text{låt t.ex. } i = N+1,\ j = N\} = |(N+1)^2 - N^2| = |2N+1|,$$

vilket strider mot antagandet, ty för $\epsilon < 3$ fås att

$$2N + 1 \not\leq \epsilon,$$

eftersom N är ett naturligt tal. Vi har härlett en motsägelse (kom ihåg att ϵ måste kunna vara ”hur litet som helst”)! Alltså måste vårt ursprungliga antagande vara felaktigt, och därmed är inte $\left\{i^2\right\}$ en Cauchyföljd.

Anmärkning. Att den givna följden inte är en Cauchyföljd inses då den växer kvadratiskt med i, så att på varandra följande tal successivt hamnar längre och längre ifrån varandra. $\square$

1.5 Uppgift 15.15

Let $\{x_i\}$ and $\{y_i\}$ be Cauchy sequences with limits x and y respectively. Show that the following sequences indeed are Cauchy sequences and compute their limits. [For (b) also assume that there is a constant c such that $y_i \geq c > 0$ for all i.]

(a) $\{x_i - y_i\}$

Vi utgår från definitionen

$$\begin{aligned} |x_i - y_i - (x_j - y_j)| &= |(x_i - x_j) - (y_i - y_j)| \\ &\leq |x_i - x_j| + |y_i - y_j|\,, \end{aligned} \tag{5}$$

via TO. Men eftersom $\{x_i\}$ och $\{y_i\}$ är givna Cauchyföljder vet vi att

$$\lim_{i,j\to\infty} |x_i - x_j| = 0, \quad \lim_{i,j\to\infty} |y_i - y_j| = 0, \tag{6}$$

varför $|x_i - y_i - (x_j - y_j)| \to 0$ när $i, j \to \infty$. Med andra ord kan VL i (5) alltid göras mindre än en noggrannhet ϵ efter val av tillräckligt stora i, j. Därav är $\{x_i - y_i\}$ en Cauchyföljd.

Man skulle, om man vill, också kunna skriva

$$|x_i - y_i - (x_j - y_j)| \leq \underbrace{|x_i - x_j|}_{\leq\epsilon_1} + \underbrace{|y_i - y_j|}_{\leq\epsilon_2} \leq \epsilon,$$

för alla $i, j \geq N = N(\epsilon) = \max\{N(\epsilon_1), N(\epsilon_2)\}$.

För att visa gränsvärdet av $\{x_i - y_i\}$ utnyttjar vi att följderna är konvergenta med

$$\lim_{i\to\infty} x_i = x, \quad \lim_{i\to\infty} y_i = y, \tag{7}$$

och får därför (pröva intuitivt med gränsvärdet $x - y$)

$$|x_i - y_i - (x - y)| = |(x_i - x) + (y - y_i)| \leq \underbrace{|x - x_i|}_{\leq\epsilon_1} + \underbrace{|y - y_i|}_{\leq\epsilon_2} \leq \epsilon,$$

med $i \geq N = N(\epsilon) = \max\{N(\epsilon_1), N(\epsilon_2)\}$. $\square$

(b) $\{x_i/y_i\}$

Vi prövar först om $\{x_i/y_i\}$ är en Cauchyföljd:

$$\left|\frac{x_i}{y_i} - \frac{x_j}{y_j}\right| = \left|\frac{x_i y_j - x_j y_i}{y_i y_j}\right| = \left|\frac{(x_i - x_j)y_j + (y_j - y_i)x_j}{y_i y_j}\right| \leq \frac{|(x_i - x_j)y_j + (y_j - y_i)x_j|}{c^2},$$

vilket — via (6) — går mot noll när $i, j \to \infty$. Vi kan alltid uppfylla (4) oavsett hur litet ϵ är, och den givna följden måste vara en Cauchyföljd.

Sedan forsätter vi med gränsvärdet och prövar på liknande sätt x/y:

$$\left|\frac{x_i}{y_i} - \frac{x}{y}\right| = \left|\frac{x_i y - x y_i}{y_i y}\right| = \left|\frac{(x_i - x)y + (y - y_i)x}{y_i y}\right| \leq \frac{|(x_i - x)y + (y - y_i)x|}{c^2},$$

som genom (7) visar sig vara det sökta gränsvärdet eftersom

$$\left|\frac{x_i}{y_i} - \frac{x}{y}\right| \to 0, \quad i, j \to \infty.$$

$\square$

1.6 Uppgift 15.16

Show that sequence which converges is a Cauchy sequence.

Vi vet att följden $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ är konvergent och sätter gränsvärdet till att vara

$$x = \lim_{i \to \infty} x_i.$$

Man kan nu utifrån (4) bilda differensen

$$|x_i - x_j| = |(x_i - x) + (x - x_j)| \leq \underbrace{|x - x_i|}_{\leq \epsilon} + \underbrace{|x - x_j|}_{\leq \epsilon} \leq 2\epsilon, \quad \forall i, j \geq N = N(\epsilon), \tag{8}$$

via omskrivningen $x_i - x_j = x_i - x + x - x_j$ samt TO. Påståendet är nu visat eftersom det, p.g.a. konvergensen hos $\{x_i\}$, alltid finns ett N så att (4) är satisfierad.

Anmärkning. Märk att det är oväsentligt att det står 2ϵ i HL av (8) i stället för ϵ. Poängen är ju att talen x_i och x_j ska kunna hamna godtyckligt nära varandra, bara vi tittar tillräckligt långt bort i följden, och i den kontexten spelar en faktor 2 ingen roll (förutom att N möjligen blir lite större). $\square$

2 Kapitel 18

2.1 Uppgift 18.3

A Lipschitz continuous function with Lipschitz constant L, where $0 \leq L < 1$, is also called a "contraction mapping". Decide which of the functions are contraction mappings on $\mathbb{R}$.

(c) $f(x) = (1+x)^{-1/2}$

Vi utgår från definitionen av Lipschitzkontinuitet och bildar

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \right| = \frac{\left| \sqrt{1+y^2} - \sqrt{1+x^2} \right|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}},$$

skrivet på gemensamt bråkstreck. Därefter kan man förlänga med konjugatet

$$\begin{aligned} \frac{\left| \sqrt{1+y^2} - \sqrt{1+x^2} \right|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} &= \frac{\left| y^2 - x^2 \right|}{\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} \right) \sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} \\ &= \frac{|x+y|}{\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} \right) \sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} |x-y| \\ &\leq \frac{|x|+|y|}{\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} \right) \sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} |x-y|, \end{aligned}$$

och ännu en gång utnyttja TO. Så långt komna återstår det att bestämma Lipschitzkonstanten

$$L = \max_{x,y \in \mathbb{R}} \frac{|x|+|y|}{\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} \right) \sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}},$$

där vi med fördel drar nytta av

$$\left. \begin{array}{l} |x| \leq \sqrt{1+x^2} \\ |y| \leq \sqrt{1+y^2} \end{array} \right\} |x| + |y| \leq \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2},$$

eftersom det då måste gälla att

$$\frac{|x|+|y|}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}} \leq 1, \tag{9}$$

med likhet om och endast om endera (eller båda) av $x, y \to \pm\infty$. Det inses exempelvis (i övre gräns för fixt $y > 0$) via

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x+y}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{y}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + \sqrt{\frac{1+y^2}{x^2}}} \to \frac{1+0}{1+0} = 1,$$

efter förkortning med x. Med anledning av observationen (9) kan lösningen delas in i två steg:

$$\text{i) } |x|, |y| < \infty, \quad \text{ii) } |x|, |y| \to \infty.$$

i) $|x|, |y| < \infty$ (x och y ligger — i en möjligt vid mening — nära origo):

$$\frac{|x|+|y|}{\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}\right)\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} = \underbrace{\frac{|x|+|y|}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}}}_{<1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}}_{\leq 1} < 1,$$

och det måste vara att $L < 1$.

ii) $|x|, |y| \to \infty$ (x och/eller y närmar sig oändligheten):

$$\frac{|x|+|y|}{\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}\right)\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} = \underbrace{\frac{|x|+|y|}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}}_{\to 0} \to 0,$$

varpå L bokstavligt talat blir försvinnande liten.

Sammataget innebär resultaten från i) och ii) att $L < 1$ alltid, så även om inte L kunde bestämmas exakt, är det ändå klart att f måste vara en kontraktion. $\square$

3 Kapitel 19

3.1 Uppgift 19.3

Rewrite the following root problems as fixed point problems in three different ways each.

(a) $7x^5 - 4x^3 + 2 = 0$

När man löser rotproblem söks rötter (nollställen) till ekvationen $f(x) = 0$. Fixpunktsproblemet är ett besläktat problem som formuleras enligt följande: finn $\overline{x}$ så att

$$g(\overline{x}) = \overline{x},$$

där $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en Lipschitzkontinuerlig funktion. Namnet "fixpunktsproblem" syftar på att $\underbrace{\text{INPUT}}_{\overline{x}} = \underbrace{\text{OUTPUT}}_{g(\overline{x})}$.

Rotproblem kan exempelvis översättas i fixpunktsproblem via omskrivningen

$$f(x) = 0 \implies kf(x) = 0 \implies \underbrace{kf(x) + x}_{g(x)} = x, \tag{10}$$

för $k \neq 0$. Vi kommer senare i kursen att få en motivering av formeln (10), där ett smart val av k visar sig lämpligt för implementation i MATLAB (Newtons metod).

Med $k = 1$ fås enkelt $g(x) = f(x) + x = 7x^5 - 4x^3 + 2 + x = x$ som ett alternativ, medan $k = \frac{1}{10}$ leder till $g(x) = \frac{1}{10}f(x) + x = \frac{1}{10}\left(7x^5 - 4x^3 + 2\right) + x = x$. Ett tredje och sista alternativ för omvandling av rot- till fixpunktsproblem kan vara

$$7x^5 - 4x^3 + 2 = 0 \implies 7x^5 + 2 = 4x^3 \implies \underbrace{\tfrac{1}{4}\left(7x^5 + 2\right)^{1/3}}_{g(x)} = x.$$

$\square$

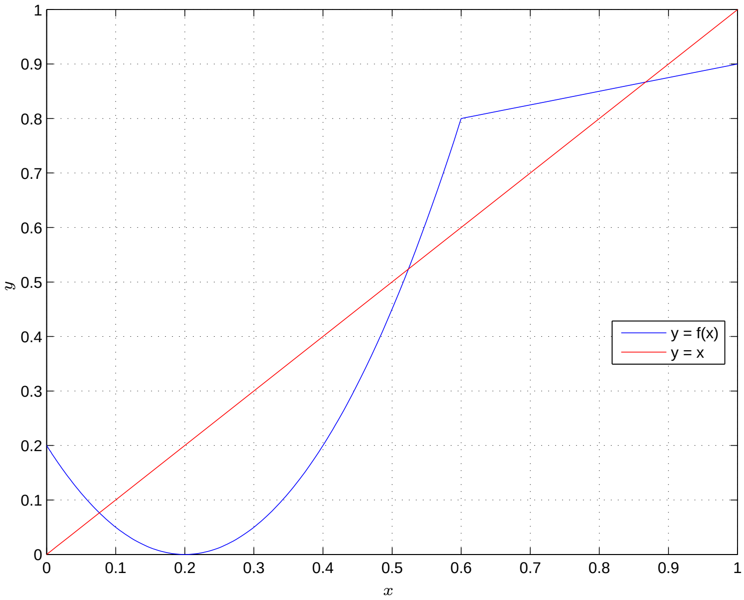
3.2 Uppgift 19.4

Draw a Lipschitz continuous function f on the interval $[0, 1]$ that has three fixed points such that $f(0) > 0$ and $f(1) < 1$.

Grafiskt fås eventuella fixpunkter i skärningspunkterna mellan linjen $y = x$ och kurvan $y = f(x)$. Om t.ex. $f(x)$ är det styckvisa polynomet

$$f(x) = \begin{cases} 5\left(x - \frac{1}{5}\right)^2, & 0 \leq x < \frac{3}{5}, \\ \frac{1}{4}x + \frac{13}{20}, & \frac{3}{5} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

kan man — via lämplig värdetabell (eller bättre i MATLAB) — plotta



Figur 1: $f(x)$ har tre fixpunkter.

Det är även möjligt att lösa ut fixpunkterna genom att lösa $f(x) = x$. De borde vara $\overline{x}_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{10}$ samt $\overline{x}_3 = \frac{13}{15}$. Eller? Pröva! (Kontrollera annars/också med fixpunktslösarna i MATLAB under läsvecka 4.)

3.3 Uppgift 19.19

Show that $g(x) = \frac{2}{3}x^3$ *is Lipschitz continuous on* $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ *with Lipschitz constant* $L = \frac{1}{2}$.

Definitionen av Lipschitzkontinuitet säger att

$$|g(x) - g(y)| = \left|\tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{2}{3}x^3\right| = \tfrac{2}{3}\left|x^3 - y^3\right| = \tfrac{2}{3}\left|x^2 + xy + y^2\right| |x - y|,$$

så att Lipschitzkonstanten ges av

$$L = \max_{x,y\in I} \tfrac{2}{3}\left|x^2 + xy + y^2\right| = \left\{\text{låt t.ex. } x = y = \tfrac{1}{2}\right\} = \tfrac{2}{3}\left|\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right| = \tfrac{1}{2},$$

vilket skulle visas.