

ALA-a 2005

RÄKNEÖVNING — VECKA 4

David Heintz, 21 september 2005

Innehåll

1	Kapitel 20	3
1.1	Uppgift 20.3	3
1.2	Uppgift 20.7	3
1.3	Uppgift 20.10	3
1.4	Uppgift 20.14	4
1.5	Uppgift 20.15	5
1.6	Uppgift 20.19	6
1.7	Uppgift 20.22	6

1 Kaptiel 20

1.1 Uppgift 20.3

Given the two vectors $a = (3, 2)$ and $b = (1, 4)$ perform the following computations.

c) $|a + b|$

Normen ("längden") av en vektor $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ definieras som

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2},$$

i [AMBS, ekv. 20.4]. Man får därför

$$|a + b| = |(3, 2) + (1, 4)| = |(4, 6)| = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13},$$

efter en inledande komponentvis addition av a och b . □

e) $a/|a|$

Normen av a är $|a| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, dvs. att

$$\frac{a}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{13}}(3, 2),$$

och man säger att a har blivit *normerad*. Den resulterande vektorn har samma riktning som a samt längden 1. □

1.2 Uppgift 20.7

Given $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ determine which of the statements that make sense.

d) $a \cdot b + c$

Eftersom skalärprodukten $a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2$ är ett tal, och c är en vektor med två komponenter, är inte additionen definierad.

Anmärkning. I MATLAB hade däremot räkneoperationen varit tillåten — i förekommande fall översätts talet $a \cdot b$ till vektorn $(a \cdot b, a \cdot b)$. Måhända praktiskt, men samtidig vilseledande. □

1.3 Uppgift 20.10

Find the projection of $b = (2, 2)$ onto a .

c) $a = (1, 2)$

Vi försöker härleda ett uttryck för den givna projektionen. Enligt Figur 1 måste det vara att

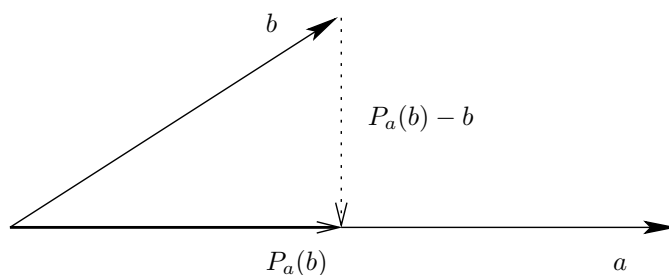
$$P_a(b) = \lambda a, \quad (1)$$

$$(P_a(b) - b) \cdot a = 0, \quad (2)$$

eftersom den projicerade vektorn $P_a(b)$ är parallell med a , samt att $P_a(b) - b$ och a är ortogonala. Kom ihåg

$$a \cdot b = |a||b| \cos(\theta),$$

där θ är minsta mellanliggande vinkel mellan a och b [AMBS, ekv 20.8].



Figur 1: Den ortogonala projektionen $P_a(b)$ av b på a .

Då har vi från (2) att $P_a(b) \cdot a = a \cdot b$ — eller genom (1) — att $\lambda a \cdot a = a \cdot b$. Nu blir

$$\lambda = \frac{a \cdot b}{a \cdot a} = \frac{a \cdot b}{|a|^2}.$$

Efter insättning i (1) fås

$$P_a(b) = \frac{a \cdot b}{|a|^2} a, \quad (3)$$

varpå tillämpning av (3) ger

$$P_a(b) = \frac{(1, 2) \cdot (2, 2)}{|(1, 2)|^2} (1, 2) = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{6}{5} (1, 2),$$

med $P_a(b)$ i samma riktning som a fast något längre.

Anmärkning. Den ortogonala projektionen av b på a är i någon mening den bästa representationen av b i a 's riktning. Man skulle kunna jämföra med komponentindelning av vektorer, med skillnaden att koordinataxeln ersatts av a . $\square$

1.4 Uppgift 20.14

Given the 2×2 matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ compute Ax and $A^T x$ for the following choice of $x \in \mathbb{R}^2$.

b) $x^T = (1, 1)$

Vi inför beteckningen a_{ij} för matriselementet i rad i samt kolonn j , så att exempelvis $a_{12} = 2$ och $a_{21} = 3$. En matris med m rader och n kolonner sägs vara av typen $m \times n$. Matris-vektormultiplikationen $Ax = b$ av typ $(m \times n) \times (n \times 1)$ ger tillbaka en vektor av typen $m \times 1$, där b_i motsvaras av skalärprodukten mellan A 's i :te rad och x , eller utskrivet

$$b_i = A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + \cdots + A_{i(n-1)}x_{n-1} + A_{in}x_n = \sum_{k=1}^n A_{ik}x_k.$$

Vi får därför

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Vid *transponering* av A (brukar skrivas A^T) byter man plats på rader och kolonner i matrisen så att $a_{ij}^T = a_{ji}$. Här blir således

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

och multiplikationen

$$A^T x = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

□

1.5 Uppgift 20.15

Given the 2×2 matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ compute the following.

d) AB^T

Matris-matris-multiplikationen $C = AB^T$ av typ $(m \times n) \times (n \times p)$ — notera att antalet kolonner i vänster- och antalet rader i högermatrisen måste vara lika — ger tillbaka en matris av typen $m \times p$. Man får att

$$c_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{i(n-1)}B_{(n-1)j} + A_{in}B_{nj} = \sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj},$$

dvs. att c_{ij} blir skalärprodukten mellan A 's i :te rad och B 's j :te kolonn. Vi räknar

$$AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 & 3 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 23 \\ 39 & 53 \end{pmatrix}.$$

□

g) A^{-1}

För $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ med element a_{ij} , där $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, definieras *inversen* A^{-1} av

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

enligt [AMBS, ekv. 20.45]. Insättning i (4) ger

$$A^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 4 - 2 \cdot 3} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

där vidare kontrollräkning ger $A^{-1}A = AA^{-1} = I$, där I är den s.k. *enhetsmatrisen*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

med nollelement överallt utom ettor i huvuddiagonalen.

Anmärkning. Notera att man inte talar om "divison med matriser" i vanlig mening. I stället "multipliceras med inverser" på liknande vis. $\square$

1.6 Uppgift 20.19

Compute the mirror image of a point with respect to a straight line in $\mathbb{R}^2$ which does not pass through the origin. Express the mapping in matrix form.

Beteckna med $a, c, d \in \mathbb{R}^2$ tre punkter i talplanet, samt med $P(\cdot)$ den operator som ortogonalt projicerar vektorer på linjen x (vilken inte passerar origo). Från Figur 2 resonerar vi oss fram till att spegelbilden s av c blir

$$c + 2[P(c - a) - (c - a)] \stackrel{*}{=} (2P - I)c + 2(I - P)a, \quad (5)$$

eftersom det, i två steg, först tar oss från origo till punkten c , och sedan vidare till spegelpunkten s (via punkten $d = P(c - a)$ "halvvägs" — notera faktorn 2 framför $P(c - a) - (c - a)$). I $(\star)$ utnyttjar vi att projektionen är linjär i det att

$$P(c - a) = Pc - Pa,$$

vilket är lätt att kontrollera (ledtråd: vi tillämpade liknande redan i (2)). Den sökta matrisformen är densamma som (5). $\square$

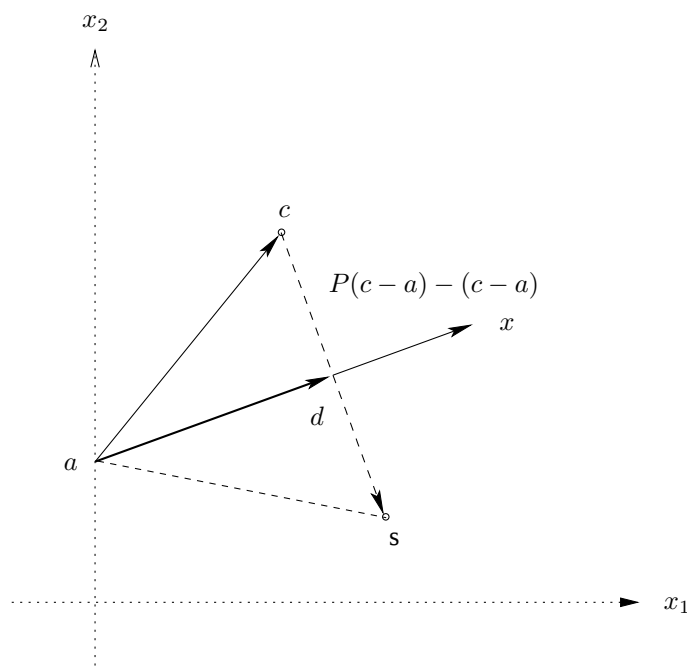
1.7 Uppgift 20.22

Compute $a \times b$ and $b \times a$.

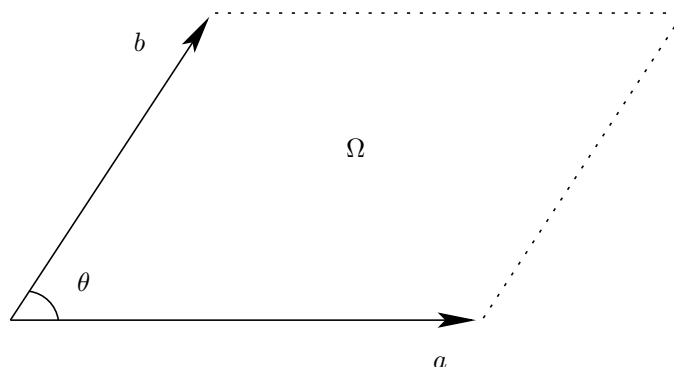
b) $a = (1, 2), b = (3, 6)$

Vektor- eller kryssprodukten mellan två vektorer $a, b \in \mathbb{R}$ ges från [AMBS, ekv. 20.18] av

$$a \times b = a_1b_2 - a_2b_1. \quad (6)$$



Figur 2: En formel för spegling av c i x kan härledas geometriskt.



Figur 3: $|a \times b| = A(\Omega)$.

Geometriskt kan absolutbeloppet $|a \times b|$ tolkas som arean av parallelogrammet vars sidor representeras av a och b (se Figur 3).

I uppgiften ser vi däremot att $a \parallel b$, varför det är troligt att $a \times b = 0$? (Två parallella vektorer kan inte spänna upp någon area.) Låt oss genom insättning i (6) kontrollera

$$a \times b = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 0, \quad b \times a = 3 \cdot 2 - 6 \cdot 1 = 0,$$

och vi fick rätt!

Anmärkning. Vanligtvis gäller inte att $a \times b = b \times a$, utan faktiskt att $a \times b = -b \times a$, och man brukar säga att vektorprodukten är *antisymmetrisk*. $\square$